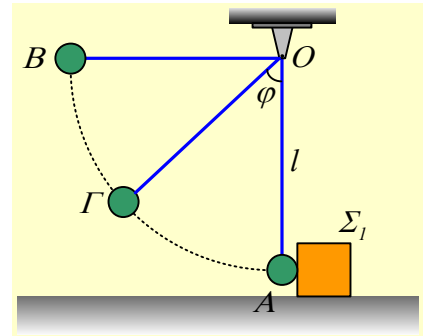


Δύο ελαστικές κρούσεις μιας σφαίρας

Μια σφαίρα μάζας $m=1\text{kg}$, είναι δεμένη στο κάτω άκρο αβαρούς και μη ελαστικού νήματος, μήκους $l=1,25\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε σταθερό σημείο O . Η σφαίρα ηρεμεί στη θέση A , με το νήμα κατακόρυφο, σε επαφή με ένα σώμα Σ_1 , όπως στο σχήμα. Εκτρέπουμε τη σφαίρα φέρνοντάς την στη θέση B , με το νήμα οριζόντιο και την αφήνουμε να κινηθεί. Φτάνοντας στη θέση A συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ_1 και στη συνέχεια επιστρέφει φτάνοντας μέχρι τη θέση Γ , όπου το νήμα σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία φ , όπου $\sin\varphi=0,64$, ενώ το Σ_1 μετακινείται κατά $x_1=1\text{m}$, στο οριζόντιο επίπεδο, όπου και σταματά.



- Να βρεθεί η ταχύτητα της σφαίρας στη θέση A , ελάχιστα πριν και ελάχιστα μετά την κρούση.
- Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής της σφαίρας στη διάρκεια της κρούσης.
- Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος Σ_1 μετά την κρούση καθώς και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης που παρουσιάζει με το επίπεδο.
- Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία, αντικαθιστώντας το σώμα Σ_1 , με ένα άλλο σώμα Σ_2 , το οποίο παρουσιάζει τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης με το επίπεδο, ενώ η σφαίρα αφήνεται να κινηθεί τώρα από την θέση Γ . Αν μετά την κεντρική ελαστική κρούση το σώμα Σ_2 διανύει απόσταση $x_2=2,25\text{m}$ στο οριζόντιο επίπεδο και σταματά, να βρείτε την μάζα του m_2 .

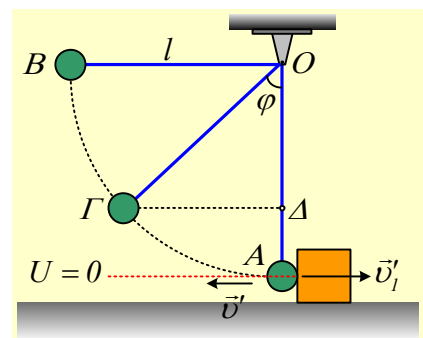
Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- Θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το σημείο κρούσης στη θέση A , εφαρμόζουμε για την πτώση της σφαίρας, από την θέση B , μέχρι την A , την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

$$K_B + U_B = K_A + U_A \rightarrow 0 + mgl = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \rightarrow$$

$$v = \sqrt{2gl} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1,25\text{m}} / \text{s} = 5\text{m/s}$$



Ενώ με την ίδια λογική, μεταξύ της θέσης A , μετά την κρούση που η σφαίρα έχει ταχύτητα $\vec{v}'$ και της θέσης B που θα φτάσει η σφαίρα, παίρνουμε για το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας μετά την κρούση:

$$K_\Gamma + U_\Gamma = K_A + U_A \rightarrow 0 + mg(\Delta A) = \frac{1}{2}mv'^2 + 0$$

$$v' = \sqrt{2g(\Delta A)}$$

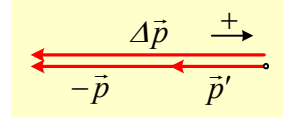
Όμως για το ύψος (ΔA) έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{(O\Delta)}{(OB)} \rightarrow (O\Delta) = (OB) \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 1,25 \cdot 0,64m = 0,8m \rightarrow$$

$$(A\Delta) = l - (O\Delta) = 1,25m - 0,8m = 0,45m$$

$$v' = \sqrt{2g(A\Delta)} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,45} = 3m/s$$

- ii) Για την μεταβολή της ορμής της σφαίρας κατά την κρούση, έχουμε (η προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική):



$$\Delta \vec{p} = \vec{p}' - \vec{p} = \vec{p}' + (-\vec{p}) \xrightarrow{\text{αλγεβρικά}}$$

$$\Delta p = mv' - mv = 1 \cdot (-3)kgm/s - 1 \cdot 5kgm/s = -8kgm/s$$

- iii) Για τις ταχύτητες της σφαίρας και σώματος Σ₁ μετά την κρούση, ισχύουν οι σχέσεις:

$$v' = \frac{m - m_1}{m + m_1} v \quad (1) \quad \text{και} \quad v'_1 = \frac{2m}{m + m_1} v \quad (2)$$

Λύνοντας την πρώτη ως προς τη μάζα m₁ βρίσκουμε:

$$v'm + v'm_1 = mv - m_1v \rightarrow m_1 = \frac{(v - v')}{(v + v')} m = \frac{5 - (-3)}{5 + (-3)} 1kg = 4kg$$

Οπότε με αντικατάσταση στην δεύτερη εξίσωση παίρνουμε για την ταχύτητα του σώματος Σ₁:

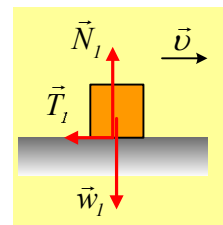
$$v'_1 = \frac{2m}{m + m_1} v = \frac{2 \cdot 1}{1 + 4} 5m/s = 2m/s$$

Εφαρμόζουμε τώρα το Θ.Μ.Κ.Ε. για το Σ₁ για την κίνησή του μετά την κρούση:

$$K_\tau - K_\alpha = W_{w_1} + W_{N_1} + W_{T_1} \xrightarrow{K_\tau = W_{w_1} = W_{N_1} = 0} -\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -\mu m_1 g x_1 \rightarrow$$

$$v_1'^2 = 2\mu g x_1 \quad (3)$$

$$\mu = \frac{v_1'^2}{2g x_1} = \frac{2^2}{2 \cdot 10 \cdot 1} = 0,2$$



- iv) Αν η σφαίρα αφεθεί στη θέση Γ να κινηθεί, βρίσκουμε ξανά από ΑΔΜΕ, όπως στο i) ερώτημα, ότι θα φτάσει στη θέση Α με ταχύτητα ίση με v'=3m/s. Ενώ δουλεύοντας ξανά με το Θ.Μ.Κ.Ε, όπως παραπάνω, για την κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο, παίρνουμε από την εξίσωση (3):

$$v_2'^2 = 2\mu g x_2 \rightarrow v_2' = \sqrt{2 \cdot 0,2 \cdot 10 \cdot 2,25} m/s = 3m/s$$

Βλέπουμε δηλαδή το σώμα Σ₂ να αποκτά την ταχύτητα της σφαίρας πριν την κρούση, πράγμα που σημαίνει ότι τα σώματα έχουν ίσες μάζες, οπότε ανταλλάσσουν ταχύτητες!

Για επιβεβαίωση ας κάνουμε αντικατάσταση στην σχέση (2) για την ταχύτητα του Σ₂, μετά την κρούση:

$$v_2' = \frac{2m}{m + m_2} v' \rightarrow 3 = \frac{2m}{m + m_2} 3 \rightarrow 2m = m + m_2 \rightarrow m_2 = m$$