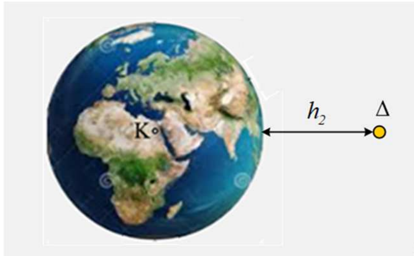
Δύο + μία πτώση σώματος.



Ένα μικρό σώμα αφήνεται να πέσει ελεύθερα από ορισμένο ύψος από την επιφάνειά της.

i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα με την οποία φτάνει στην επιφάνεια της Γης, όταν το ύψος είναι h_1=5m.

ii) Το ίδιο σώμα αφήνεται να πέσει από ύψος $h_2=R_Γ$.

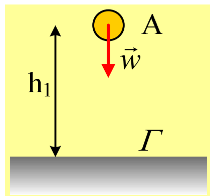
α) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση με την οποία θα ξεκινήσει την πτώση του.

β) Ποια η ταχύτητά του μετά από πτώση 5m;

γ) Με ποια ταχύτητα το σώμα φτάνει στην επιφάνεια της Γης;

Στα παραπάνω θεωρούμε τη Γη ακίνητη, σε πολύ μεγάλη απόσταση από όλα τα άλλα ουράνια σώματα, χωρίς ατμόσφαιρα, ενώ η επιτάχυνση της βαρύτητας κοντά στην επιφάνειά της είναι ίση με 10m/s^2 και η ακτίνα της $R_Γ$=6.400km.

Απάντηση:



i) Εφαρμόζουμε για την πτώση του σώματος την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (ΑΔΜΕ), θεωρώντας μηδενική τη δυναμική ενέργεια στο έδαφος.

$$K_A + U_A = K_Γ + U_Γ \rightarrow mgh_1 = \frac{1}{2}mυ_1^2 \rightarrow$$
$$υ_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5}m/s = 10m/s$$

iii) Η ένταση του πεδίου βαρύτητας της Γης, σε ένα σημείο Δ, σε ύψος h_2, ίση με την επιτάχυνση που θα αποκτήσει ένα σώμα, αν αφεθεί να κινηθεί, δίνεται από την εξίσωση:

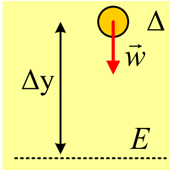
$$g = G\frac{M_Γ}{r^2} = G\frac{M}{r^2} \quad (1)$$

Όπου r η απόσταση του σημείου Δ από το κέντρο της Γης.

α) Αν εφαρμόσουμε την παραπάνω εξίσωση για ένα σημείο Γ, στην επιφάνεια της Γης, θα πάρουμε:

$$g_Γ = g_o = G\frac{M}{R_Γ^2} \rightarrow GM = g_o R_Γ^2 \quad (1.1) \xrightarrow{(1)}$$
$$g_Δ = G\frac{M}{(2R_Γ)^2} = \frac{g_o R_Γ^2}{4R_Γ^2} = \frac{1}{4}g_o \rightarrow$$
$$g_Δ = \frac{1}{4}10m/s^2 = 2,5m/s^2.$$

β) Δουλεύοντας όπως και στο i) ερώτημα, θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο που βρίσκεται 5m χαμηλότερα από το σημείο Δ, εφαρμόζουμε ξανά την ΑΔΜΕ μεταξύ Δ και Ε, παίρνοντας:



$$K_\Delta + U_\Delta = K_E + U_E \to mg\Delta y = \frac{1}{2}mv^2 \to$$
$$v = \sqrt{2g\Delta y} = \sqrt{2 \cdot 2,5 \cdot 5}m/s = 5m/s$$

γ) Παραπάνω υπολογίσαμε την αρχική επιτάχυνση που αποκτά το σώμα ίση με 2,5m/s^2, ενώ η επιτάχυνσή του όταν φτάνει στο έδαφος είναι ίση με 10m/s^2. Είναι φανερόν ότι το βαρυτικό πεδίο της Γης πρέπει τώρα να το αντιμετωπίσουμε ως ανομοιογενές και όχι σαν ομογενές, όπως κάναμε μέχρι τώρα.

Εφαρμόζουμε ξανά την ΑΔΜΕ, μεταξύ των θέσεων Δ και Γ, αλλά τώρα θεωρούμε μηδενική την δυναμική ενέργεια στο άπειρο:

$$K_\Delta + U_\Delta = K_\Gamma + U_\Gamma \to$$
$$-G\frac{M}{r_\Delta}m = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - G\frac{M}{r_\Gamma}m$$
$$\upsilon_2 = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r_\Gamma} - \frac{1}{r_\Delta}\right)} \xrightarrow{(1.1)} \upsilon_2 = \sqrt{2g_o R_\Gamma^2\left(\frac{1}{R_\Gamma} - \frac{1}{2R_\Gamma}\right)} \to$$
$$\upsilon_2 = \sqrt{g_o R_\Gamma} = \sqrt{10 \cdot 6.400 \cdot 10^3}m/s = 8.000m/s$$

dmargaris@gmail.com