

Εκθετική αύξηση μεγέθους.

Ρεύμα σε κύκλωμα RL.

Έστω ότι έχουμε το κύκλωμα του διπλανού σχήματος, όπου τη στιγμή $t=0$ κλείνουμε το διακόπτη. Να βρεθεί η εξίσωση της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Απάντηση:

Εφαρμόζοντας το 2^ο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα για μια τυχαία στιγμή t , πριν την αποκατάσταση του ρεύματος, παίρνουμε:

$$E - iR - L \frac{di}{dt} = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα $L \frac{di}{dt} + Ri - E = 0$, η οποία είναι μια διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$A \frac{dx}{dt} + Bx + C = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση (1) έχει λύση της μορφής:

$$x = \frac{-C}{B} \left(1 - e^{-\frac{B}{A}t} \right) \quad (2)$$

Έτσι στην περίπτωση μας η εξίσωση της έντασης παίρνει τη μορφή:

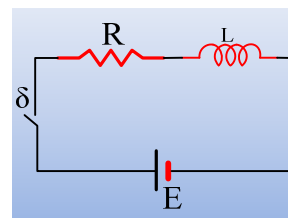
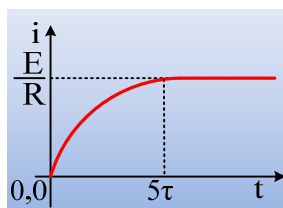
$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (3)$$

Η παραπάνω εξίσωση μας δίνει ότι:

Για $t=0 \rightarrow i=0$, ενώ

Για $t \rightarrow \infty$ τότε $i \rightarrow \frac{E}{R}$

Συνεπώς η γραφική της παράσταση είναι αυτή του παρακάτω σχήματος, αφού είναι μια καμπύλη, που ξεκινά από το μηδέν και τείνει ασυμπτωτικά στην τιμή $\frac{E}{R}$ σε άπειρο (θεωρητικά) χρόνο.



Ας έρθουμε τώρα στην εξίσωση (2). Ο εκθέτης, θα πρέπει να είναι ένας καθαρός αριθμός (χωρίς διαστάσεις) συνεπώς η παράσταση $\frac{B}{A}$ θα πρέπει να έχει μονάδες s^{-1} ή ισοδύναμα η παράσταση $\frac{A}{B}$ έχει διαστάσεις χρόνου και στο S.I. θα έχει μονάδες seconds. Την παράσταση αυτή, μπορούμε να ονομάσουμε λοιπόν σταθερά χρόνου

ορίζοντας $\tau = \frac{A}{B}$, οπότε η εξίσωση (2) να γραφεί $x = \frac{-C}{B} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ ή ισοδύναμα η (3)

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (4)$$

Είδαμε προηγουμένως ότι η ένταση του ρεύματος σταθεροποιείται στην τιμή E/R θεωρητικά σε άπειρο χρόνο. Αν όμως στην εξίσωση (4) θέσουμε $t=5\tau$ παίρνουμε:

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}} \right) \approx 0,99 \frac{E}{R}$$

Δηλαδή βάσιμα μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι, πρακτικά, η ένταση του ρεύματος σταθεροποιείται σε χρόνο ίσο με 5τ .

Για παράδειγμα, τροφοδοτώντας ένα πηνίο με αυτεπαγωγή $L=2\text{mH}$, μέσω αντίστασης $R=10\Omega$, θα χρειαστεί χρόνος:

$$5\tau = \frac{5L}{R} = 1\text{ms}$$

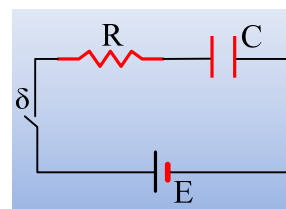
για αποκατάσταση σταθερής έντασης ρεύματος.

Ας δούμε κάποια ανάλογα προβλήματα τώρα από άλλες περιοχές της Φυσικής.

Φόρτιση πυκνωτή

Στο διπλανό κύκλωμα τη στιγμή $t=0$ κλείνουμε το διακόπτη, με στόχο να φορτίσουμε έναν αρχικά αφόρτιστο πυκνωτή.

- Πόσο είναι τελικά το μέγιστο φορτίο Q_0 που αποκτά ο πυκνωτής;
- Ποια χρονική στιγμή ο πυκνωτής έχει φορτίο $\frac{1}{2} Q_0$;
- Τι τελικά ποσοστό της παρεχόμενης ενέργειας από την πηγή, αποθηκεύεται στον πυκνωτή;



Απάντηση:

- Εφαρμόζοντας τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα παίρνουμε:

$$E - iR \cdot V_c = 0 \quad \text{ή} \quad E - iR - \frac{q}{C} = 0 \quad \text{ή} \quad R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q - E = 0 \quad (2\alpha)$$

Οπότε με βάση την εξίσωση (2) έχουμε:

$$q = EC \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (2\beta)$$

Συνεπώς και εδώ, θεωρητικά ο πυκνωτής χρειάζεται άπειρο χρόνο για φόρτιση, αλλά πρακτικά η φόρτισή του έχει ολοκληρωθεί μετά από χρόνο $t_1 = 5\tau = 5RC$. Το μέγιστο δε φορτίο του είναι $Q_0 = CE$.

ii) Με αντικατάσταση στην σχέση (2β) $q = \frac{1}{2} Q_0$, παίρνουμε:

$$\frac{CE}{2} = EC \left(1 - e^{-\frac{t_1}{RC}} \right) \rightarrow e^{-\frac{t_1}{RC}} = \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{t_1}{RC} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow t_1 = RC \ln 2$$

iii) Η συνολική ενέργεια που προσφέρει η πηγή στο κύκλωμα, μέχρι την πλήρη φόρτιση του πυκνωτή είναι:

$$W_{\pi} = Q_0 \cdot E = CE^2$$

Η ενέργεια εξάλλου που αποθηκεύεται στον πυκνωτή είναι $W_C = \frac{1}{2} CE^2$, συνεπώς το 50% της παρεχόμενης ενέργειας αποθηκεύεται στον πυκνωτή, η υπόλοιπη μετατρέπεται σε θερμότητα πάνω στον αντιστάτη R.

Σημείωση: Υπάρχει και ένα μικρό ποσό, που εκπέμπεται με την μορφή ΗΜΚ, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί όμως αμελητέο.

Πτώση με αντίσταση αέρα ανάλογης της ταχύτητας.

Ένα κιβώτιο μάζας 20kg αφήνεται να πέσει από ένα ελικόπτερο, το οποίο έχει μηδενική ταχύτητα, σε ύψος $h=500\text{m}$ από το έδαφος. Αν κατά την κίνησή του το κιβώτιο δέχεται δύναμη αντίστασης από τον αέρα της μορφής $F = -bv = -10v$ (μονάδες στο S.I.), ζητούνται:

i) Η οριακή ταχύτητα την οποία θα αποκτήσει το κιβώτιο.

ii) Σε πόσο χρόνο το κιβώτιο θα φτάσει στο έδαφος;

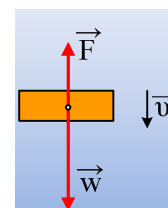
Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$

Απάντηση:

i) Έστω κάποια στιγμή που η ταχύτητα του κιβωτίου είναι v , τότε οι δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Εφαρμόζοντας τον 2° νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε: $\Sigma F = ma$ ή

$$mg - bv = m \frac{dv}{dt} \rightarrow m \frac{dv}{dt} + bv - mg = 0 \quad (3\alpha)$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης (με βάση τα προηγούμενα) είναι:



$$v = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right) \rightarrow v = 10 \left(1 - e^{-\frac{t}{2}} \right) \text{ (S.I.)}$$

Συνεπώς η ταχύτητα του κιβωτίου αυξάνεται εκθετικά με το χρόνο με σταθερά χρόνου $\tau = \frac{m}{b} = 2s$,

οπότε η ταχύτητα θα φτάσει οριακά στην τιμή $v_{op} = \frac{mg}{b} = 20m/s$ θεωρητικά σε άπειρο χρόνο,

πρακτικά όμως, θεωρούμε ότι η ταχύτητα αυτή σταθεροποιείται σε χρόνο $t_1 = 5\tau = 10s$.

ii) Ολοκληρώνοντας την σχέση (3^α) για την διάρκεια της επιταχυνόμενης κίνησης, παίρνουμε:

$$m \frac{dv}{dt} + bv - mg = 0 \rightarrow \int_0^{5\tau} m dv + \int_0^{5\tau} b v dt - \int_0^{5\tau} mg dt = 0$$

$$mv_{op} + b \cdot h_1 - mgt_1 = 0 \text{ ή}$$

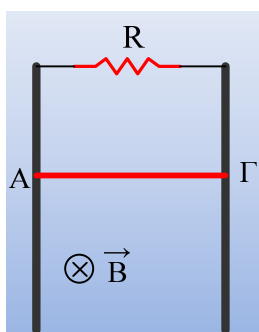
$$h_1 = \frac{m(gt_1 - v_{op})}{b} \rightarrow h_1 = 160m$$

Στη συνέχεια το κιβώτιο θα κινηθεί με σταθερή ταχύτητα και θα φτάσει στο έδαφος, αφού διανύσει

$$\text{απόσταση } h - h_1 = 340m \text{ σε χρονικό διάστημα } \Delta t = \frac{h - h_1}{v_{op}} = 17s$$

Συνεπώς ο συνολικός χρόνος κίνησής του είναι $t_1 + \Delta t = 27s$.

Επαγωγή και οριακή ταχύτητα



Ο αγωγός ΑΓ του διπλανού σχήματος μάζας $0,1kg$, μήκους $l=1m$ και αντίστασης $r=0,1\Omega$, αφήνεται να κινηθεί κατακόρυφα, χωρίς τριβές, σε επαφή με δυο κατακόρυφους μεταλλικούς στύλους, χωρίς αντίσταση. Τα δύο πάνω άκρα των αγωγών συνδέονται μέσω αντιστατή με αντίσταση $R=0,3\Omega$, ενώ το σύστημα βρίσκεται κάθετα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B=1T$.

i) Να γίνει η γραφική παράσταση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα σε συνάρτηση με το χρόνο.

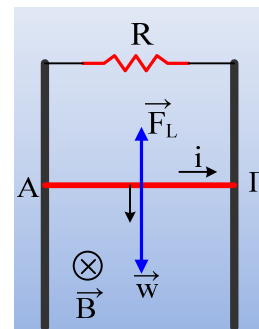
ii) Να βρεθεί η ηλεκτρική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα στο κύκλωμα, μέχρι τη στιγμή που ο αγωγός αποκτά (πρακτικά) οριακή ταχύτητα.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

- i) Ο αγωγός ΑΓ με την επίδραση του βάρους, αρχίζει να επιταχύνεται προς τα κάτω, αλλά τότε αναπτύσσεται πάνω του ΗΕΔ από επαγωγή $E=Bv\ell$ με αποτέλεσμα το κύκλωμα να αρχίσει να διαρρέεται από ρεύμα, με φορά όπως στο σχήμα, έντασης $i = \frac{E}{R+r} = \frac{Bv\ell}{R+r}$. Αποτέλεσμα άμεσο, να ασκηθεί στον αγωγό δύναμη Laplace με φορά προς τα πάνω και μέτρο:

$$F_L = Bi\ell = \frac{B^2\ell^2}{R+r}v$$



Εφαρμόζοντας τον 2^ο νόμο Νεύτωνα παίρνουμε:

$$w - F_L = ma \rightarrow$$

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{B^2\ell^2}{R+r}v - mg = 0$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής (με βάση όσα έχουν αναφερθεί) είναι :

$$v = \frac{mg(R+r)}{B^2\ell^2} \left(1 - e^{-\frac{B^2\ell^2}{m(R+r)}t} \right) \rightarrow v = 0,4 \left(1 - e^{-\frac{t}{0,04}} \right) \quad (\text{S.I.})$$

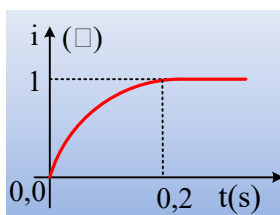
Παρατηρούμε δηλαδή ότι η ταχύτητα του αγωγού αυξάνεται εκθετικά αποκτώντας οριακή τιμή $v_{op}=0,4\text{m/s}$, θεωρητικά σε άπειρο χρόνο, πρακτικά όμως σε χρόνο:

$$t=5\tau = 5 \frac{m(R+r)}{B^2\ell^2} = 0,2\text{s}.$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν την ταχύτητα στην εξίσωση της έντασης παίρνουμε:

$$i = \frac{E}{R+r} = \frac{Bv\ell}{R+r} = 1 \left(1 - e^{-\frac{t}{0,04}} \right) \quad (\text{S.I.}),$$

ενώ η γραφική παράσταση είναι αυτή του παρακάτω σχήματος:



- ii) Η ηλεκτρική ενέργεια που εμφανίζεται σαν θερμότητα στο κύκλωμα είναι ίση:

$$Q = \int_0^{0,2} i^2 (R+r) dt = \int_0^{0,2} 1(0,3+0,1) dt - \int_0^{0,2} 2(0,3+0,1) e^{-\frac{t}{0,04}} dt + \int_0^{0,2} 1(0,3+0,1) e^{-\frac{2t}{0,04}} dt \rightarrow$$

$$Q = [0,4t]_0^{0,2} + [0,032e^{-t}]_0^{0,2} - [0,008e^{-2t}]_0^{0,2} = 0,08\text{J} - 0,032\text{J} + 0,008\text{J} = 0,056\text{J}$$

Σχόλιο:

Θα μπορούσαμε όμως να βρούμε επίσης την θερμότητα με βάση την διατήρηση της ενέργειας, αφού η μείωση της αρχικής δυναμικής ενέργειας του αγωγού, μετατρέπεται εν μέρει σε κινητική και εν

μέρει σε ηλεκτρική στο κύκλωμα. Αν λοιπόν ο αγωγός έχει κατέλθει κατά h , μέχρι να αποκτήσει την οριακή του ταχύτητα, θα ισχύει:

$$\Delta U = K + Q \rightarrow$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{op}^2 + Q \rightarrow Q = mgh - \frac{1}{2}mv_{op}^2$$

Αλλά για την κίνηση (μέχρι τη θέση απόκτησης οριακής ταχύτητας) του αγωγού έχουμε:

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{B^2 \ell^2}{R+r} v - mg = 0 \rightarrow$$

$$\int_0^{0,2} m dv + \int_0^{0,2} \frac{B^2 \ell^2}{R+r} v dt - \int_0^{0,2} mg dt = 0 \quad \text{ή}$$

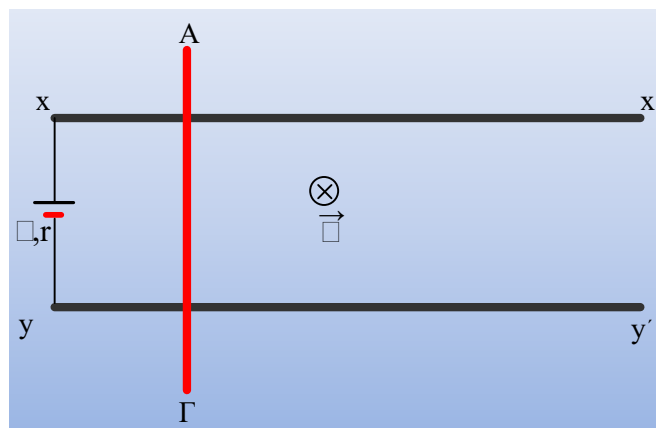
$$mv_{op} + \frac{B^2 \ell^2}{R+r} h - mgt = 0 \quad \text{ή}$$

$$h = \frac{m(gt - v_{op})(R+r)}{B^2 \ell^2} = 0,064m \quad \text{οπότε:}$$

$$Q = mgh - \frac{1}{2}mv_{op}^2 = 0,064J - 0,008J = 0,056J$$

Άλλη μια επαγωγή.

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος, οι αγωγοί xx' και yy' , χωρίς αντίσταση, είναι οριζόντιοι σε απόσταση $d=1\text{m}$. Στα άκρα τους x και y συνδέεται πηγή ΗΕΔ $E=4\text{V}$ και εσωτερικής αντίστασης $r=1\Omega$. Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο ΟΜΠ έντασης $B=1\text{T}$. Σε μια στιγμή αφήνεται, σε επαφή με τους δύο αγωγούς και κάθετα προς αυτούς, ένα ευθύγραμμο σύρμα ΑΓ, μάζας $0,1\text{kg}$, μήκους 2m και με αντίσταση 2Ω , το οποίο παρατηρούμε ότι κινείται προς τα δεξιά, χωρίς τριβές.



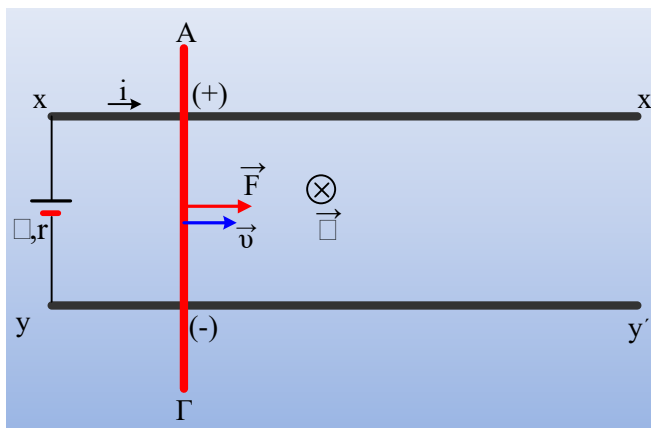
- i) Να μελετηθεί η κίνηση του σύρματος.
- ii) Να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο η ηλεκτρική ενέργεια μετατρέπεται σε μηχανική της χρονικές στιγμές:
 - α) $t_1=0,4\text{s}$ και
 - β) $t_2=1,4\text{s}$.

Απάντηση:

Το τμήμα του σύρματος μεταξύ των δύο παραλλήλων αγωγών xx' και yy' αρχίζει να διαρρέεται από ρεύμα με

αρχική τιμή $I_o = \frac{E}{R+r}$ όπου R η αντίστασή του, όπου με βάση το νόμο της αντίστασης $R=\rho S/l$ βρίσκουμε

ότι είναι ίση με το μισό της αντίστασης όλου του σύρματος. Δηλαδή $R=1\Omega$.



Αλλά τότε ο αγωγός δέχεται δύναμη Laplace από το μαγνητικό πεδίο, με φορά προς τα δεξιά, η οποία επιταχύνει το σύρμα. Αλλά τότε εμφανίζεται πάνω στο σύρμα ΗΕΔ από επαγωγή με πολικότητα αντίθετη της πηγής. Η ΗΕΔ που αναπτύσσεται στο τμήμα μεταξύ των δύο παραλλήλων αγωγών (αυτή μας ενδιαφέρει, αφού αυτή υπάρχει στο κλειστό κύκλωμα που δημιουργείται) έχει τιμή $E_{\text{επ}}=Bvd$. Αλλά τότε το κύκλωμα θα διαρρέεται από ρεύμα έντασης:

$$I = \frac{E - Bvd}{R + r}$$

Εφαρμόζοντας τώρα το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για το σύρμα παίρνουμε:

$$\Sigma F = ma \text{ ή } F_L = ma \rightarrow$$

$$B \frac{E - Bvd}{R + r} d = ma \rightarrow$$

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{B^2 d^2}{R + r} v - \frac{BED}{R + r} = 0$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής είναι:

$$v = \frac{E}{Bd} \left(1 - e^{-\frac{B^2 d^2}{m(R+r)} t} \right) \rightarrow v = 4 \left(1 - e^{-\frac{t}{0,2}} \right) \text{ (S.I.)}$$

Πράγμα που σημαίνει ότι η ταχύτητα του σύρματος θα αυξηθεί εκθετικά με το χρόνο φτάνοντας σε οριακή τιμή 4m/s, θεωρητικά σε άπειρο χρόνο, αλλά πρακτικά σε χρόνο $t=5\tau=5 \cdot 0,2\text{s}=1\text{s}$

iii) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:

$$\frac{dK}{dt} = F \cdot v = B \frac{E - Bvd}{R + r} d \cdot v$$

α) Τη στιγμή $t_1=0,4\text{s}$ η ταχύτητα του αγωγού είναι:

$$v = 4 \left(1 - e^{-\frac{t}{0,2}} \right) = 4 \left(1 - e^{-\frac{0,4}{0,2}} \right) = 4(1 - e^{-2}) \approx 3,46 \text{ m/s}$$

$$\text{Οπότε: } \frac{dK}{dt} = F \cdot v = B \frac{E - Bvd}{R + r} d \cdot v \approx 0,93 \text{ J/s}$$

β) Την χρονική στιγμή $t_2 = 1,4 \text{ s} \gg 5\tau$, η ταχύτητα έχει πλέον σταθεροποιηθεί στην τιμή 4 m/s , οπότε $E_{\text{επ}} = Bvd = 4 \text{ V}$ και το κύκλωμα δεν διαρρέεται από ρεύμα (ο αγωγός δεν επιταχύνεται πλέον).

Συνεπώς:

$$\frac{dK}{dt} = F \cdot v = 0$$

dmargaris@sch.gr