Φόρτιση πυκνωτή και Αυτεπαγωγή.

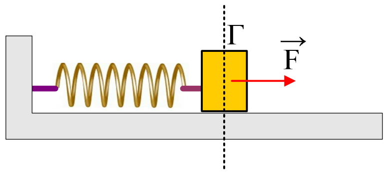
Έστω και μετά από ημέρες, καλοκαίρι γαρ, ας συνεχίσουμε την συζήτηση (εκμεταλλευόμενοι μια μικρή διακοπή στις ..διακοπές μας) γύρω από το αν «χάνουμε» και πόση ενέργεια κατά την φόρτιση ενός πυκνωτή. Κατ' αρχήν να ξεκαθαρίσουμε τι εννοούμε όταν λέμε ότι «φορτίζουμε ένα πυκνωτή από σταθερή τάση V»; Για μένα αυτό σημαίνει ότι: Αποκαθίσταται ΣΤΑΘΕΡΗ διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών ίση με V και ότι ο πυκνωτής αποκτά ΣΤΑΘΕΡΟ φορτίο q=CV. Εάν αυτό γίνεται αποδεκτό, μπορούμε να προχωρήσουμε. Αν με τον όρο αυτό εννοούμε κάτι άλλο, ας το ξεκαθαρίσουμε από πριν.

Ας προσπαθήσουμε λοιπόν να δώσουμε μια ολοκληρωμένη απάντηση, με χρήση όσο γίνεται, λιγότερων Μαθηματικών*[1]. Μπορεί η προσπάθεια να είναι λιγότερο «επιστημονική» αλλά ίσως είναι περισσότερο διαφωτιστική από την πλευρά της Φυσικής που μας ενδιαφέρει. Στόχος της μελέτης αυτής είναι να αποδειχθεί ότι το 50% της παρεχόμενης από την πηγή ενέργειας, **δεν καταλήγει τελικά στον πυκνωτή.**

Να ξεκινήσουμε με μια άσκηση, από τα γνωστά…

Άσκηση:

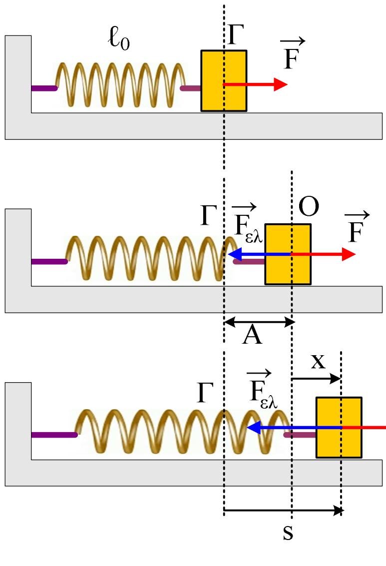
Ένα σώμα ηρεμεί στο σημείο Γ, πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς k. Σε μια στιγμή t=0 δέχεται την επίδραση μιας **σταθερής** οριζόντιας δύναμης F, όπως στο σχήμα.



i) Να αποδειχθεί ότι το σώμα θα εκτελέσει α.α.τ. και να βρεθεί η εξίσωσης της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική.
ii) Να γίνει το διάγραμμα της απόστασης s του σώματος από την αρχική θέση ηρεμίας του σε συνάρτηση με το χρόνο.
iii) Αν η ταλάντωση του σώματος είναι φθίνουσα, εξαιτίας μικρών αποσβέσεων, να γίνει ένα ποιοτικό διάγραμμα της απόστασης s σε συνάρτηση με το χρόνο. Τι ποσοστό της ενέργειας που μετεφέρθη στο σύστημα, μέσω του έργου της δύναμης F, αποθηκεύεται **τελικά** στο ελατήριο;

Λύση:

i) Το σώμα επιταχύνεται προς τα δεξιά μέχρι τη θέση Ο όπου ΣF=0, δηλαδή $F-F_{ελ}=0$ ή F=kA (1), η οποία είναι και η θέση ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ του, με την επίδραση της δύναμης F.



Έστω τώρα το σώμα σε μια τυχαία θέση που απέχει κατά x από την θέση ισορροπίας Ο, όπως στο σχήμα. Για τις δυνάμεις στον οριζόντιο άξονα έχουμε:

$$\Sigma F_x = F - F_{ελ} = F - k(A+x) = F - kA - kx$$

Και λόγω της (1) παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = -kx$$

Όπου x η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας Ο. Συνεπώς το σώμα εκτελεί α.α.τ. και επειδή στην αρχική θέση Γ έχει μηδενική ταχύτητα η απόσταση ΓΟ είναι ίση με το πλάτος Α, δηλαδή

$$A = F/k.$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

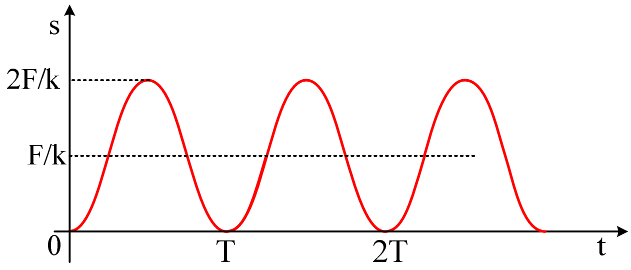
$x = A\cdot ημ(ωt+φ_0)$ και αφού για t=0 x=-A τελικά:

$$x = F/k \cdot ημ(ωt + 3π/2)$$

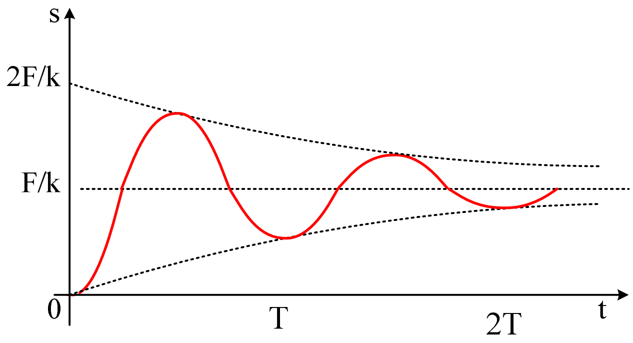
ii) Η απόσταση s, όπως εύκολα φαίνεται στο σχήμα είναι:

$$s=A+x = F/k + F/k\cdot ημ(ωt+ 3π/2) \quad (2)$$

Με γραφική παράσταση την παρακάτω.



iii) Αν η ταλάντωση ήταν φθίνουσα το πλάτος θα μειωνόταν με την πάροδο του χρόνου και τελικά το σώμα θα ηρεμούσε στην αρχική θέση ισορροπίας της ταλάντωσης Ο, ένα δε ποιοτικό διάγραμμα που μας δείχνει την κατάσταση είναι το παρακάτω.



Το συνολικό έργο της δύναμης F είναι $W_F=F\cdot A$ (μην ξεχνάμε ότι κάθε σταθερή δύναμη είναι **και** συντηρητική), ενώ τελικά στο ελατήριο παραμένει αποθηκευμένη ενέργεια:

$$U= ½\, k\cdot A^2 = ½\, kA\cdot A= ½\, F\cdot A \quad !!!!$$

Δηλαδή το μισό της παρεχόμενης ενέργειας (αυτό το 50%) παραμένει σαν δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

(Αν τα παραπάνω φαντάζουν ανέλπιστα, πάρτε ένα κατακόρυφο ελατήριο και στο κάτω άκρο του κρεμάστε ένα σώμα, αφήστε το να κινηθεί από την θέση φυσικού μήκους και δείτε τι γίνεται…)

Ερώτηση: Ποια είναι η εξίσωση της κίνησης του σώματος;

$$ΣF=mα \rightarrow$$

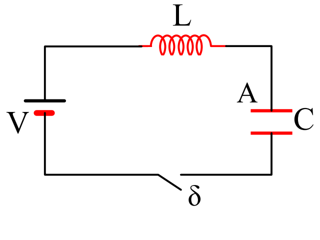
$$F-k\cdot s=mα \quad ή$$

$$\boxed{m\frac{d^2s}{dt^2}+k\cdot s=F} \quad (3)$$

Η τελευταία εξίσωση (3) είναι η διαφορική εξίσωση της κίνησης. (Η παραπάνω εξίσωση θα μπορούσε να μετατραπεί σε αντίστοιχη διαφορική που να περιέχει το x, αλλά δεν το θέλουμε αυτήν την στιγμή)

Ας έρθουμε τώρα στο διπλανό κύκλωμα και ας υποθέσουμε ότι δεν έχουμε καθόλου αντιστάσεις (R=0) και για t=0 κλείνουμε τον διακόπτη για να φορτίσουμε τον πυκνωτή από μια **σταθερή** τάση V.

Ο δεύτερος κανόνας του Kirchhoff μας δίνει:



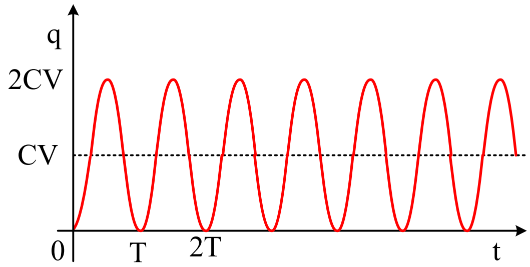
$$V - L\cdot di/dt - V_c = 0 \text{ ή}$$
$$V - L\cdot di/dt - q/C = 0 \text{ ή}$$
$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}\cdot q = V \quad (4)$$

Από σύγκριση των (3) και (4) βλέπουμε ότι η κατάσταση είναι **ΑΠΟΛΥΤΩΣ** όμοια, συνεπώς η εξίσωση για το φορτίο του οπλισμού Α του πυκνωτή είναι κατ’ αντιστοιχία με την εξίσωση (2):

$$q = V/(1/C) + V/(1/C)\ \eta\mu(\omega t + 3\pi/2) \text{ ή}$$

$$q = CV + CV\cdot \eta\mu(\omega t + \frac{3\pi}{2}) \quad (5)$$

με αντίστοιχη γραφική παράσταση:



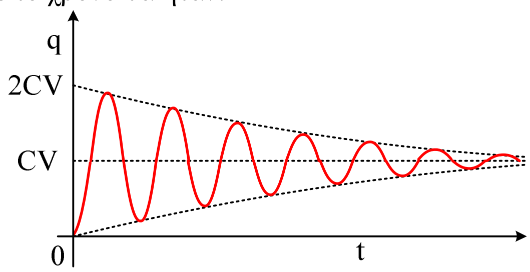
Τι μας λέει η εξίσωση (4) και η παραπάνω γραφική της παράσταση; Ο οπλισμός Α του πυκνωτή φορτίζεται από φορτίο διπλάσιο από το αναμενόμενο (2CV), αλλά κατόπιν το χάνει γιατί εκφορτίζεται αφού το κύκλωμα εκτελεί μια αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση, για να φορτιστεί ξανά με θετικό φορτίο. Ίδια ακριβώς με την ταλάντωση του σώματος που ήταν δεμένο στο άκρο του ελατηρίου, το σώμα δεν πηγαίνει ποτέ αριστερότερα της αρχικής του θέσης Γ.

Προφανώς αν αυτό συμβαίνει σε ένα κύκλωμα δεν έχουμε αυτό που ορίσαμε αρχικά με τη φράση «φόρτιση πυκνωτή». Έχουμε ταλάντωση; Ναι. Δεν έχουμε όμως φόρτιση πυκνωτή σε σταθερή τάση V.

Και αν στο κύκλωμα υπήρχε μια μικρή αντίσταση (και για να θυμηθούμε και τις …. φθίνουσες) μια αντίσταση για την οποία θα ίσχυε η σχέση $\Lambda < \omega_0$ ή διαφορετικά:

$$\frac{R}{2L} < \sqrt{\frac{1}{LC}} \rightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6)$$

Τότε το κύκλωμα θα εκτελούσε φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση και η γραφική παράσταση του φορτίου σε συνάρτηση με το χρόνο θα ήταν:



δηλαδή «αργά ή γρήγορα» το κύκλωμα θα έπαυε να διαρρέεται από ρεύμα και ο πυκνωτής θα αποκτούσε φορτίο q=CV, οπότε και θα είχε ενέργεια:

$$U = \tfrac{1}{2}\, q\cdot V$$

Ενώ η πηγή θα είχε προσφέρει ενέργεια:

$$W_{o\lambda} = q\cdot V$$

Δηλαδή μόνο το 50% της παρεχόμενης ενέργειας από την πηγή αποθηκεύεται στον πυκνω-

τή, το άλλο 50% το … χάσαμε!!!

Σχόλιο 1^{o}:

Πράγματι συμβαίνει «υπερφόρτιση» του πυκνωτή όπως υποστηρίζει ο συνάδελφος Νίκος Σκουλίδης, αλλά το αποτέλεσμα δεν αλλάζει. Τελικά το 50% της ενέργειας που παρέχει η πηγή καταλήγει στον πυκνωτή.

Σχόλιο 2^{o}:

Ελπίζω να μην υποστηρίζει κάποιος ότι θα μπορούσαμε σε ένα απλό κύκλωμα όπως το παραπάνω, (και όχι ένα ειδικό ηλεκτρονικό κύκλωμα), στην περίπτωση που θα εκτελούσε αμείωτη ταλάντωση, να ανοίξουμε το διακόπτη κάποια στιγμή π.χ. τη στιγμή t=T/2 και έτσι να εκμεταλλευτούμε όλη την ενέργεια! Να υπενθυμίσω ότι η περίοδος ταλάντωσης ενός τέτοιου κυκλώματος είναι $T = 2\pi\sqrt{LC}$ και παίρνοντας ένα πηνίο των 300 σπειρών του εργαστηρίου όπου ο συντελεστής αυτεπαγωγής είναι της τάξης του 10^{-4}H, και για πυκνωτή χωρητικότητας C=10μF θα είχαμε περίοδο περίπου ίση με $2\cdot 10^{-4}$ s, εκτός και αν μπορεί να μας πείσει ότι είναι τόσο «γρήγορο πιστόλι» που θα μπορούσε να το κάνει… και με ακρίβεια, ώστε να πετύχει στόχο!!!

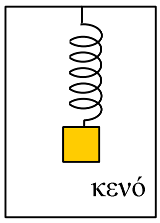
Σχόλιο 3^{o}:

Για να συμβαίνουν τα παραπάνω θα πρέπει η αντίσταση του κυκλώματος, με βάση τα παραπάνω αριθμητικά δεδομένα και σύμφωνα με την σχέση (6), να είναι μικρότερη των 6Ω (περίπου). Αν η αντίσταση του κυκλώματος είναι μεγαλύτερη, δεν θα υπάρξει ταλάντωση αλλά μια «απεριοδική» φόρτιση του πυκνωτή με φορτίο q=CV.

Σχόλιο 4^{o}:

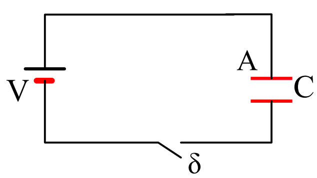
Η εξίσωση (4) προέκυψε με εφαρμογή της διατήρησης της ενέργειας στο κύκλωμα (κανόνας Kirchhoff) και με την προϋπόθεση ότι δεν έχουμε άλλες απώλειες ενέργειας, όπως π.χ. εκπομπή ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Αυτό είναι μια καλή προσέγγιση αφού πράγματι ο ρυθμός ακτινοβολίας είναι πολύ μικρός. Τι θα γίνει όμως, αν αντικαταστήσουμε το πηνίο με ένα σύρμα χωρίς αντίσταση;

Ας φανταστούμε τώρα δύο (νοητικά) πειράματα.



Α) Στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου, δένουμε ένα σώμα, το οποίο αφήνουμε να κινηθεί από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, ενώ το έχουμε βάλει σε ένα κενό αέρος δοχείο, όπως στο σχήμα. Τι κίνηση θα κάνει το σώμα;

Η κίνηση **δεν θα είναι** αμείωτη αρμονική ταλάντωση, αφού ναι μεν, δεν έχουμε δύναμη τριβής F=-bu αλλά έχουμε μείωση της ενέργειας λόγω αποσβέσεων στο ελατήριο. (Έχουμε μετατροπή της μηχανικής ενέργειας σε θερμική πάνω στο ελατήριο). Έτσι η ταλάντωση είναι φθίνουσα και μετά από αρκετό χρόνο το σώμα θα σταματήσει να ταλαντώνεται και η κατάσταση θα είναι τελικά ίδια με αυτήν που περιγράψαμε στην άσκηση.



Β) Θέλουμε να φορτίσουμε έναν πυκνωτή χρησιμοποιώντας απλά σύρματα, υπεραγωγούς, όπως στο σχήμα. Τι θα γίνει αν κλείσουμε τον διακόπτη;

Κάνοντας μια **παρέκταση***[4] ας θεωρήσουμε ότι το κύκλωμα εκτελεί επίσης αμείωτη ταλάντωση. Αφού υπολογίσουμε την αυτεπαγωγή του κυκλώματος της τάξης των 10^{-7}H *[2], βρίσκουμε περίοδο ταλάντωσης $T_1 = 2\pi\sqrt{LC} \approx 6\cdot 10^{-6}$s, πράγμα που σημαίνει ότι η περίοδος είναι πάνω από 30 φορές μικρότερη από ότι στο αρχικό κύκλωμα. Αυτό όμως έχει μια άλλη συνέπεια. Το κύκλωμα αυτό ακτινοβολεί πολύ περισσότερη ενέργεια από ότι το πρώτο κύκλωμα. Γιατί; Μα η ακτινοβολούμενη ενέργεια είναι ανάλογη του τετραγώνου της συχνότητας. Έτσι αν P_1 η ενέργεια που ακτινοβολείται στο κύκλωμα με το πηνίο και P_2 η αντίστοιχη ισχύς στο διπλανό κύκλωμα θα έχουμε:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\lambda f_2^2}{\lambda f_1^2} \approx \frac{(32 f_1)^2}{f_1^2} \approx 1000$$

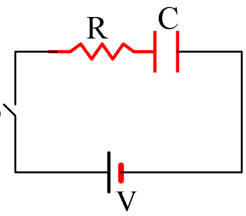
Δηλαδή όταν έχουμε μόνο τους αγωγούς-σύρματα ακτινοβολείται 1.000 φορές περισσότερη ενέργεια, παρά στο κύκλωμα με το πηνίο. Στο κύκλωμα αυτό λοιπόν δεν μπορεί να αγνοηθεί η ενέργεια που ακτινοβολείται. Συνεπώς το κύκλωμα θα εκτελέσει στην πραγματικότητα φθίνουσα ταλάντωση μέχρι το φορτίο του πυκνωτή να σταθεροποιηθεί στην τιμή q=CV.

Και μια σκέψη που ερμηνεύει ποιοτικά την κατάσταση και μας οδηγεί στο ίδιο συμπέρασμα: Όταν μειώνεται η περίοδος ταλάντωσης, αυξάνει η επιτάχυνση των ταλαντούμενων φορτίων, που είναι η αιτία εκπομπής ΗΜΚ.

Συμπέρασμα και σε αυτό το κύκλωμα η κατάσταση είναι ίδια τελικά και **ο πυκνωτής θα αποκτήσει σύντομα φορτίο q=CV και θα κρατήσει τελικά το 50% της ενέργειας που παρέχει η πηγή, ενώ το άλλο 50% θα ακτινοβοληθεί…**

Να σημειωθεί ότι για να εκτελέσει ταλάντωση ένα τέτοιο κύκλωμα, με βάση της σχέση (6) θα πρέπει η αντίσταση των συρμάτων να είναι μικρότερη από 0,2Ω περίπου. Για μεγαλύτερη αντίσταση δεν θα υπάρξει ταλάντωση, απλά ο πυκνωτής θα φορτιστεί «απεριοδικά» αποκτώντας φορτίο q=CV.

Σχόλιο 5^{ο}:



Τέλος αν έχουμε το διπλανό κύκλωμα, όπου η αντίσταση R είναι πολύ μεγαλύτερη των 0,2Ω; Είναι δηλαδή της τάξης του kΩ;

Τότε αγνοούμε εντελώς το φαινόμενο της αυτεπαγωγής και δεχόμαστε ότι η ενέργεια που παρέχει η πηγή μετατρέπεται εν μέρει σε θερμότητα δ πάνω στον αντιστάτη και εν μέρει αποθηκεύεται στον πυκνωτή, οπότε ο 2^{ος} κανόνας του Kirchhoff δίνει:

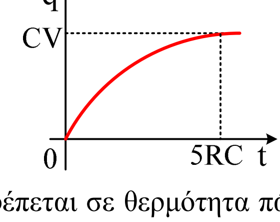
$$V - iR - V_c = 0 \quad *^3 \text{ ή}$$

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = V$$

Η λύση της οποίας δίνει:

$$q = CV(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

και η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι:



Προφανώς και εδώ το 50% μετατρέπεται σε θερμότητα πάνω στον αντιστάτη και το υπόλοιπο 50% πηγαίνει στον πυκνωτή.

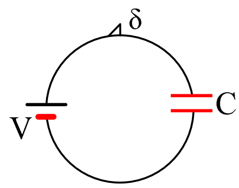
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Άσχετα αν φορτίσουμε τον πυκνωτή μέσω μιας αντίστασης, οπότε αγνοούμε το φαινόμενο της αυτεπαγωγής, είτε μέσω ενός πηνίου με μεγάλη αυτεπαγωγή, είτε μέσω απλού αγωγού χωρίς καθόλου! αντίσταση, **σε όλες τις περιπτώσεις ο πυκνωτής θα αποκτήσει**

τελικά ενέργεια U= ½ qV, ενώ η πηγή θα έχει δώσει στα φορτία ενέργεια W=qV, δηλαδή μόνο το 50% της παρεχόμενης ενέργειας από την πηγή, αποθηκεύεται στον πυκνωτή.

Σημειώσεις:

*1. Η γενική λύση θα μπορούσε να επιδιωχθεί γράφοντας την διαφορική εξίσωση για ένα κύκλωμα που περιέχει πηνίο, αντίσταση, πυκνωτή και πηγή τάσης V. Αλλά και πάλι θα έπρεπε πριν γράψουμε τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff να αποφασίσουμε αν θα υπάρχει απώλεια ενέργειας λόγω ακτινοβολίας. Έτσι στην διαπραγμάτευση που ακολουθεί έγινε τμηματική προσέγγιση του θέματος, αγνοώντας κάθε φορά τους παράγοντες που δεν επηρεάζουν πολύ το πρόβλημά μας.

*2..Ποιας τάξης μεγέθους είναι ο συντελεστής αυτεπαγωγής σε ένα κύκλωμα που φορτίζουμε έναν πυκνωτή μέσω συρμάτων μήκους περίπου 15cm το καθένα; Μια καλή ιδέα είναι να φανταστούμε ότι έχουμε το κύκλωμα του διπλανού σχήματος όπου θεωρούμε ότι έχουμε έναν κυκλικό αγωγό ακτίνας r=5cm.



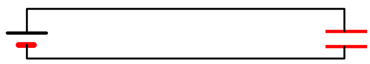
Μόλις κλείσουμε το διακόπτη θα αναπτυχθεί ΗΕΔ από αυτεπαγωγή: (δεχόμαστε ότι σε όλη την επιφάνεια του κύκλου η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι όση και στο κέντρο του)

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(BA)}{dt} = -\frac{d(K_\mu \frac{2\pi i}{r} \cdot \pi r^2)}{dt} \rightarrow$$

$$E = -2K_\mu \pi^2 r \frac{di}{dt}$$

Άρα ο συντελεστής αυτεπαγωγής είναι $L=2K_\mu\pi^2 r \approx 10^{-7}$ H

Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι αν, αντί για κυκλικό αγωγό, είχαμε π.χ. το διπλανό κύκλωμα η αυτεπαγωγή θα ήταν ακόμη μικρότερη, άρα μεγαλύτερη συχνότητα εναλλασσόμενου ρεύματος και μεγαλύτερο ρυθμό απώλειας ενέργειας λόγω ακτινοβολίας.



*3 Ας παρατηρηθεί ότι το κύκλωμα φόρτισης έχει διαφορετική συμπεριφορά ανάλογα με τις τιμές L και R. Έτσι το να λέμε ότι γράφουμε την κατάλληλη εξίσωση, δεν είναι όλη η αλήθεια. Γράφουμε (και επιλύουμε) την κατάλληλη εξίσωση, αφού προηγούμενα θεωρήσουμε κάποιους παράγοντες αμελητέους. Μια πρακτική τόσο γνώριμη στην επιστήμη…

*4. Για να εμπλουτίζουμε και το λεξιλόγιό μας, διαβάζοντας το βιβλίο του Πωλ Ντέϊβις «Συμπαντικό τζακ-ποτ», βρήκα τον όρο **παρέκταση**: Όταν παίρνουμε μια ιδέα, μια θεωρία ή έναν νόμο της Φυσικής και την εφαρμόζουμε σε άλλο μέγεθος ή ενέργεια μεγαλύτερης ή μικρότερης κλίμακας.

dmargaris@sch.gr