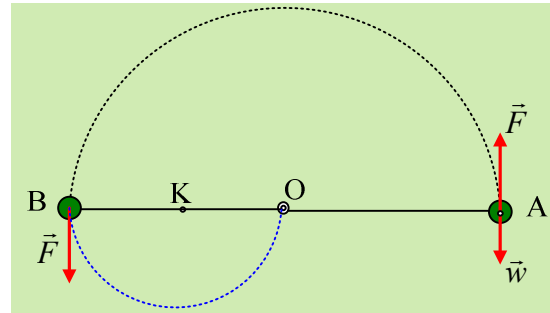


Η στροφορμή και η αλλαγή τροχιάς.

Μια μικρή σφαίρα μάζας $m=0,4\text{kg}$ την οποία θεωρούμε υλικό σημείο αμελητέας ακτίνας, συγκρατείται στη θέση (Α), δεμένη στο άκρο οριζώντιου μη εκτατού νήματος μήκους $l=1\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε σταθερό σημείο Ο. Σε μια στιγμή ασκούμε στη σφαίρα μια δύναμη σταθερού μέτρου $F = \frac{20}{\pi} \text{N} \approx 6,4 \text{N}$, κάθετη στο νήμα, με αποτέλεσμα να



διαγράφει κατακόρυφο ημικύκλιο και μετά από λίγο να φτάνει στο αντιδιαμετρικό σημείο Β, όπως στο σχήμα.

- i) Να υπολογιστεί ο αρχικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας, ως προς το κέντρο Ο της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει. Ποιος ο αντίστοιχος ρυθμός τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο;
 - ii) Να βρεθεί η στροφορμή της σφαίρας ως προς το Ο, καθώς και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της, τη στιγμή που η σφαίρα φτάνει στη θέση (Β).
 - iii) Στη θέση Β το νήμα έρχεται σε επαφή με ένα καρφί Κ στο μέσον του, γύρω από το οποίο η σφαίρα ξεκινά μια νέα κυκλική τροχιά, κέντρου Κ και ακτίνας $R=0,5\text{m}$, ενώ ταυτόχρονα η δύναμη F καταργείται.
- α) Για την θέση Β, αμέσως μετά την κατάργηση της δύναμης, να βρεθεί η στροφορμή και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της ως προς το κέντρο Κ, της νέας κυκλικής τροχιάς στην οποία θα κινηθεί.
 - β) Ποια η μέγιστη κινητική ενέργεια που θα αποκτήσει στη συνέχεια η σφαίρα και ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ως προς το Κ, στη θέση μέγιστης κινητικής ενέργειας;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Και οι δύο ζητούμενοι ρυθμοί είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τον αναγνώστη, όπως στο σχήμα, με μέτρα:

$$\frac{dL_0}{dt} = \Sigma \tau = (F - mg)l \rightarrow$$

Θέση Α:

$$\frac{dL_0}{dt} = (6,4 - 0,4 \cdot 10) \cdot 1 \text{kgm}^2 / \text{s}^2 = 2,4 \text{kgm}^2 / \text{s}^2$$

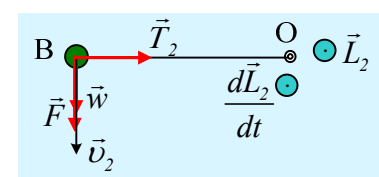
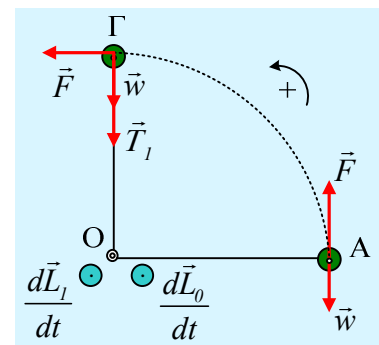
Θέση Γ:

$$\frac{dL_l}{dt} = \Sigma \tau = \tau_F + \tau_w + \tau_{T_l} = Fl + 0 + 0 \rightarrow$$

$$\frac{dL_l}{dt} = 6,4 \cdot 1 \text{kgm}^2 / \text{s}^2 = 6,4 \text{kgm}^2 / \text{s}^2$$

- ii) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για τη σφαίρα μεταξύ των θέσεων Α και Β, παίρνοντας:

$$K_B - K_A = W_w + W_F \rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 - 0 = 0 + Fs \quad (1)$$



Αφού α) το βάρος είναι μια συντηρητική δύναμη το έργο της οποίας είναι μηδενικό, μιας και είναι ίσο με την διαφορά των δύο δυναμικών ενεργειών $U_{αρχ}-U_{τελ}$ ενώ η δύναμη είναι διαρκώς εφαπτόμενη στην τροχιά και το έργο της είναι ίσο:

$$W_F = \sum F \cdot ds = F \cdot \sum ds = F \cdot s = F \cdot \pi l$$

Έτσι επιστρέφοντας στην (1) έχουμε:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = F \cdot \pi l \rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2F \cdot \pi l}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{20}{\pi} \cdot \pi \cdot l}{0,4}} m/s = 10 m/s$$

Συνεπώς η αντίστοιχη στροφορμή, ως προς το O, με κατεύθυνση όπως στο σχήμα, έχει μέτρο:

$$L_2 = mv_2 l = 0,4 \cdot 10 \cdot 1 kgm^2/s = 4 kgm^2/s.$$

Την ίδια κατεύθυνση έχει και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας ως προς το O, με μέτρο:

$$\frac{dL_2}{dt} = \sum \tau = \tau_F + \tau_w + \tau_{T_2} = Fl + mgl + 0 \rightarrow$$

$$\frac{dL_2}{dt} = 6,4 \cdot 1 kgm^2/s^2 + 0,4 \cdot 10 \cdot 1 kgm^2/s^2 = 10,4 kgm^2/s^2$$

iii) Μόλις το νήμα κτυπήσει στο καρφί K, η σφαίρα ξεκινά μια νέα κυκλική τροχιά κέντρου K και ακτίνας $R = \frac{1}{2}l = 0,5m$.

α) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί ξανά τα διανύσματα της στροφορμής και του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας, ως προς το K, με μέτρα:

$$L_3 = mv_2 R = 0,4 \cdot 10 \cdot 0,5 kgm^2/s = 2 kgm^2/s \text{ και}$$

$$\frac{dL_3}{dt} = \sum \tau = \tau_w + \tau_{T_2} = mgR + 0 = 0,4 \cdot 10 \cdot 0,5 kgm^2/s^2 = 2 kgm^2/s^2.$$

β) Η σφαίρα επιταχύνεται λόγω του βάρους μέχρι τη θέση Δ του διπλανού σχήματος, το χαμηλότερο σημείο της νέας κυκλικής τροχιάς της. Παίρνοντας τώρα την ΑΔΜΕ (για ποικιλία...) μεταξύ των θέσεων B και Γ, με $U_\Delta = 0$, παίρνουμε:

$$K_B + U_B = K_\Delta + U_\Delta \rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 + mgR = K_{max} \rightarrow$$

$$K_{max} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgR = \frac{1}{2}0,4 \cdot 10^2 J + 0,4 \cdot 10 \cdot 0,5 J = 22 J$$

Ενώ οι ροπές των δυνάμεων, w και T_3 ως προς το K, είναι μηδενικές, οπότε και $\frac{dL_\Delta}{dt} = 0$.

