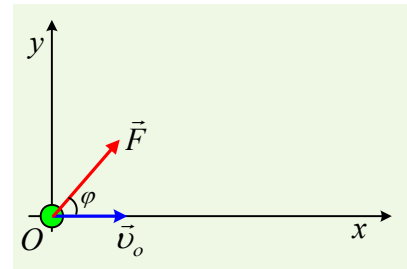


Η αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται κατά την διεύθυνση του άξονα x , ενός ορθογωνίου συστήματος αξόνων x, y ένα σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ με ταχύτητα $v_0=1\text{m/s}$. Σε μια στιγμή $t_0=0$, που το σώμα περνά από την αρχή των αξόνων O , δέχεται μια **σταθερή** δύναμη μέτρου $F=0,5\text{N}$, η οποία σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα x , όπως στο σχήμα (σε κάτοψη), όπου $\eta\mu\varphi=0,8$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,6$.



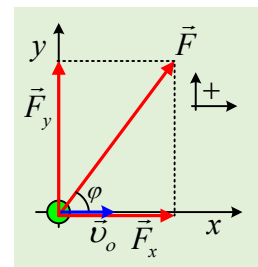
- i) Θεωρώντας σύνθετη την κίνηση, να γράψετε τις εξισώσεις ταχύτητας και θέσης, για την κίνηση του σώματος στους άξονες x και y .
- ii) Να βρείτε τη χρονική στιγμή t_1 όπου η ταχύτητα του σώματος σχηματίζει γωνία 45° με την διεύθυνση x .
- iii) Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του σώματος τη στιγμή t_1 .
- iv) Να υπολογισθεί ο αρχικός ρυθμός με τον οποίο μεταφέρει ενέργεια στο σώμα η δύναμη F , καθώς και το έργο της μέχρι τη στιγμή t_1 .

Απάντηση:

- i) Αναλύουμε την ασκούμενη δύναμη F σε δυο συνιστώσες πάνω στους άξονες x και y , όπως στο διπλανό σχήμα. Για τα μέτρα των δύο συνιστωσών έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{F_x}{F} \rightarrow F_x = F \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 0,5 \cdot 0,6\text{N} = 0,3\text{N} \text{ και}$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{F_y}{F} \rightarrow F_y = F \cdot \eta\mu\varphi = 0,5 \cdot 0,8\text{N} = 0,4\text{N}$$



Αλλά τότε το σώμα αποκτά (συνιστώσες) επιτάχυνσης στους δύο άξονες, ίδιας κατεύθυνσης με τις δυνάμεις (ή αν προτιμάτε με θετικές αλγεβρικές τιμές, με βάση τον προσανατολισμό των αξόνων) με μέτρα:

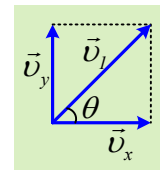
$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{0,3}{2}\text{m/s}^2 = 0,15\text{m/s}^2 \text{ και}$$

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{0,4}{2}\text{m/s}^2 = 0,2\text{m/s}^2$$

Οπότε θεωρώντας ότι έχουμε δύο ανεξάρτητες κινήσεις στους δύο άξονες, με βάση την αρχή της επαλληλίας ή ανεξαρτησίας των κινήσεων, οι κινήσεις αυτές θα είναι ευθύγραμμες ομαλά μεταβαλλόμενες και οι ζητούμενες εξισώσεις είναι:

Άξονας x	Άξονας y
$v_x = v_0 + a_x t \quad (1)$	$v_y = a_y t \quad (3)$
$x = v_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (2)$	$y = \frac{1}{2} a_y t^2 \quad (4)$

- ii) Τη στιγμή t_1 που η ταχύτητα v_1 σχηματίζει γωνία $\theta=45^\circ$ με την διεύθυνση x , το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο των ταχυτήτων, βλέπε σχήμα, είναι τετράγωνο και για τα μέτρα των δύο ταχυτήτων στους άξονες θα έχουμε $v_x=v_y$. Αλλά τότε από τις εξισώσεις (1) και (3) παίρνουμε:



$$v_o + \alpha_x t_1 = \alpha_y t_1 \rightarrow t_1 = \frac{v_o}{\alpha_y - \alpha_x} = \frac{1}{0,2 - 0,15} s = 20s$$

- iii) Με αντικατάσταση στην (3) βρίσκουμε:

$$v_y = \alpha_y t_1 = 0,2 \cdot 20 m/s = 4 m/s$$

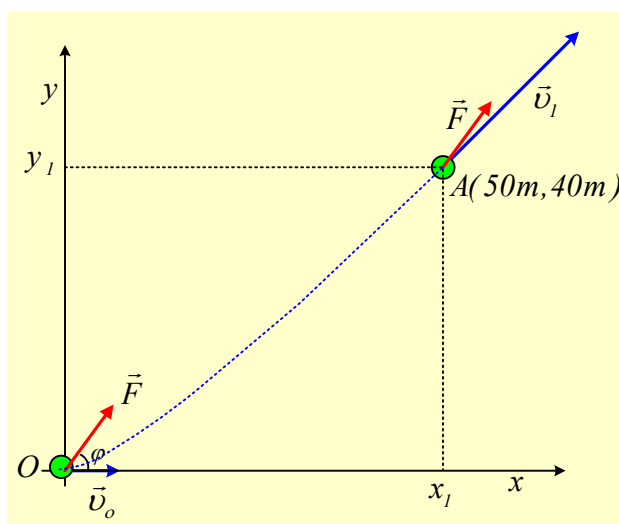
Τσου μέτρου και με την v_x . Συνεπώς η ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο:

$$v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2v_y^2} = v_y \sqrt{2} = 4\sqrt{2} m/s$$

Με γνωστή διεύθυνση ($\theta=45^\circ$). Εξάλλου με αντικατάσταση στις εξισώσεις (2) και (3) βρίσκουμε τις συντεταγμένες τις θέσης το σώματος τη στιγμή t_1 :

$$x_1 = v_o t_1 + \frac{1}{2} \alpha_x t_1^2 = \left(1 \cdot 20 + \frac{1}{2} 0,15 \cdot 20^2 \right) m = 50m$$

$$y_1 = \frac{1}{2} \alpha_y t_1^2 = \frac{1}{2} 0,2 \cdot 20^2 m = 40m$$



- iv) Ο αρχικός ρυθμός μεταφοράς ενέργειας στο σώμα, μέσω του έργου της δύναμης, είναι ίσος με την αρχική ισχύ της δύναμης:

$$\frac{dW_F}{dt} = P_F = \frac{F \cdot dx \cdot \cos \varphi}{dt} = F \cdot v_o \cdot \cos \varphi = 0,5 \cdot 1 \cdot 0,6 J/s = 0,3 J/s$$

Ενώ εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα από την θέση O, μέχρι τη θέση A (50m,40m), βλέπε παραπάνω σχήμα, παίρνουμε:

$$K_A - K_O = W_w + W_N + W_F \xrightarrow{W_w=W_N=0}$$

$$W_F = \frac{1}{2}mv_l^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}2 \cdot (4\sqrt{2})^2 J - \frac{1}{2}2 \cdot l^2 J = 3lJ$$

Σχόλιο:

Η εξίσωση τροχιάς μοιάζει, αλλά δεν είναι η γνωστή μας παραβολή από την οριζόντια βολή. Η μορφή της τροχιάς, με μπλε εστιγμένη γραμμή στο παραπάνω σχήμα, έχει σχεδιαστεί με την βοήθεια TN αφού δεν είναι κάποια γνωστή καμπύλη.

dmargaris@gmail.com