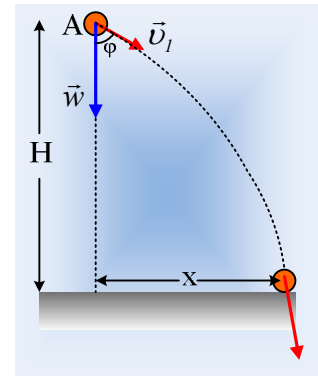


Η αρχή της επαλληλίας... και η ενέργεια

Μια μπάλα μάζας $0,2\text{kg}$ εκτοξεύεται οριζόντια με κάποια αρχική ταχύτητα, με αποτέλεσμα σε μια στιγμή, που θεωρούμε $t=0$, να περνά από σημείο Α, με ταχύτητα μέτρου $v_1=5\text{m/s}$, η οποία σχηματίζει γωνία ϕ με την κατακόρυφη, όπου $\sin\phi=0,6$ και $\cos\phi=0,8$, όπως στο διπλανό σχήμα. Η μπάλα φτάνει στο έδαφος μετά από 2s .

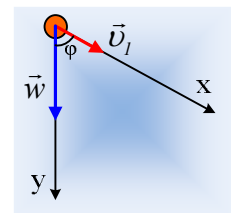


- Υποστηρίζει κάποιος τη θέση, ότι η κίνηση της μπάλας μπορεί να μελετηθεί με βάση την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων. Μια ευθύγραμμη ομαλή στη διεύθυνση της ταχύτητας v_1 και μια ελεύθερη πτώση στη κατακόρυφη διεύθυνση. Είναι σωστή η θέση αυτή;
- Αν είναι σωστή, να εφαρμοστεί για να υπολογιστεί το μέτρο της τελικής ταχύτητας της μπάλας, καθώς και η τελική της κινητική ενέργεια.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- Η θέση είναι σωστή. Πράγματι έχουμε το δικαίωμα να μελετήσουμε την κίνηση θεωρώντας τους άξονες x και y , όπως στο διπλανό σχήμα. Η αρχή της επαλληλίας, δεν μας ορίζει άξονες. Δεν μιλάει για άξονες! Μιλάει για δυο ανεξάρτητες κινήσεις και εδώ οι δυο κινήσεις είναι πράγματι ανεξάρτητες, οπότε μπορούμε να γράψουμε:



Άξονας x	Άξονας y
$v_x=v_1$ (1)	$v_y=gt$ (3)
$x=v_1 \cdot t$ (2)	$y=\frac{1}{2}gt^2$ (4)

- Με αντικατάσταση στην (3) παίρνουμε $v_y=gt=20\text{m/s}$, ενώ $v_x=5\text{m/s}$ και με βάση το διπλανό σχήμα έχουμε για την τελική ταχύτητα:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + 2v_x v_y \sin\phi} = \sqrt{5^2 + 20^2 + 2 \cdot 5 \cdot 20 \cdot 0,8} \text{ m/s} = \sqrt{585} \text{ m/s}$$

Αλλά τότε η τελική κινητική ενέργεια της μπάλας είναι ίση:

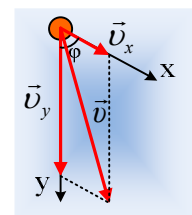
$$K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}0,2 \cdot 585 \text{ J} = 58,5 \text{ J}$$

Εναλλακτικά, αλλά και «πιο γρήγορα»!

Η μπάλα έχει μια αρχική κινητική ενέργεια, λόγω της ταχύτητας v η οποία παραμένει σταθερή και αποκτά και μια εξαιτίας της κίνησής της στο άξονα y . Έτσι έχουμε:

$$v_y=gt=10 \cdot 2\text{m/s}=20\text{m/s}$$

οπότε:



$$K_{\text{τελ}} = K_x + K_y = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 \rightarrow$$

$$K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2}0,2 \cdot 5^2 J + \frac{1}{2}0,2 \cdot 20^2 J = 42,5 J$$

Ωχ!!! Τι έγινε παιδιά; Πού έκανα το λάθος;

Πάμε από την αρχή:

Η κατακόρυφη μετατόπιση κατά μήκος του άξονα y είναι από την (4):

$$y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 \text{m} = 20 \text{m}$$

Αλλά τότε το έργο του βάρους (δηλαδή η δυναμική ενέργεια που μετετράπη σε κινητική είναι ίση):

$$K_y = mgy = 0,2 \cdot 10 \cdot 20 J = 40 J$$

Ωραία! $40J + 2,5J = 42,5J$

Ωραία, τα δυο τελευταία αποτελέσματα ταιριάζουν, άρα αυτό είναι το σωστό. Οπότε πρέπει να βρούμε το λάθος που έγινε όταν βρήκαμε αρχικά τα 58,5J...

Και όμως... το λάθος δεν έγινε στον αρχικό υπολογισμό!!!

Η αρχή της επαλληλίας (η λεγόμενη και αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων) μια χαρά τα λέει.

Μπορούμε να μελετάμε δύο κινήσεις (υπαρκτές ή όχι, υποτιθέμενες ή όχι, αδιάφορο) σε δυο άξονες!

Δεν λέει ότι έχουμε μια κινητική ενέργεια σε κάθε άξονα, ούτε λέει ότι μπορούμε να αναλύσουμε την κινητική ενέργεια σε άξονες!!!

Και τότε πού κρύβεται το λάθος;

Όταν η μπάλα φτάνει στο έδαφος έχει διανύσει:

Στη διεύθυνση x, έχει μετατοπισθεί κατά $\Delta x = v_1 t = 10 \text{m}$, ενώ στη διεύθυνση y, κατά $\Delta y = 20 \text{m}$.

Αλλά η συνολική κατακόρυφη απόσταση που έχει διανύσει είναι:

$$H = \Delta y + y_1 = 20 \text{m} + \Delta x \cdot \sin \phi = 20 \text{m} + 10 \cdot 0,8 \text{m} = 28 \text{m}$$

Αλλά τότε το έργο του βάρους είναι ίσο:

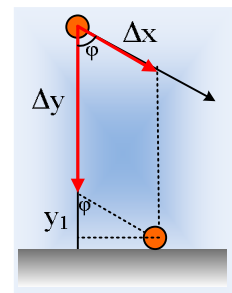
$$W_w = mgH = 56 J$$

Και η τελική κινητική ενέργεια ίση με το άθροισμα της $K_{\text{αρχ}} + W_w$ ή

$$K_{\text{τελ}} = 2,5 J + 56 J = 58,5 J.$$

Αν το βάλετε σε μαθητή και σας βρει το λάθος, γράψτε μου...

Συμπέρασμα;



Η εξίσωση $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2$ ισχύει μόνο επειδή οι άξονες είναι κάθετοι μεταξύ τους και ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα....

Ενώ η αρχή της επαλληλίας δεν έχει κανένα περιορισμό σε άξονες, αφού μελετά διανυσματικά μεγέθη.

Τελικά η γνώμη μου:

Δεν πρέπει σε καμιά φάση της διδασκαλίας μας, να αφήνουμε στο μαθητή την «υποψία» ότι μπορεί να δουλεύει σε άξονες παίρνοντας K_x ή K_y . Αν το κάνουμε, περνά στο υποσυνείδητό του, ότι όπως αναλύουμε την ορμή, αναλύουμε και την κινητική ενέργεια...

dmargaris@gmail.com