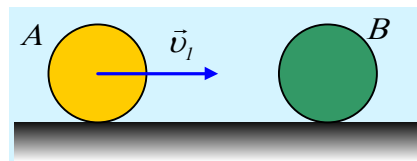


Η ελάχιστη κινητική ενέργεια

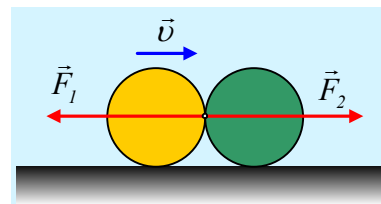
Σε λείο οριζόντιο επίπεδο, κινούνται στην ίδια ευθεία, χωρίς να περιστρέφονται, δύο σφαίρες Α και Β με ίσες ακτίνες και μάζες m και $3m$, αντίστοιχα, οι οποίες κάποια στιγμή συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Αν πριν την κρούση η Α σφαίρα έχει ταχύτητα μέτρου v_1 με φορά προς τα δεξιά.



- Υποστηρίζεται η άποψη ότι η σφαίρα Α θα επιβραδυνθεί, εξαιτίας της δύναμης που θα δεχτεί από την σφαίρα Β, με αποτέλεσμα μετά την κρούση να έχει ταχύτητα με μέτρο μικρότερο από v_1 . Να εξετάσετε αν αυτό είναι σωστό ή όχι.
- Αν μετά την κρούση η σφαίρα Α έχει την ελάχιστη δυνατή κινητική ενέργεια, να βρεθεί η ταχύτητα της Β σφαίρας πριν την κρούση.
- Να υπολογιστεί το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας και του μέτρου της ορμής της σφαίρας Β, που οφείλεται στη κρούση.

Απάντηση:

- Στη διάρκεια της κρούσης, ασκούνται στις δύο σφαίρες Α και Β οι δυνάμεις F_1 και F_2 αντίστοιχα, όπως στο διπλανό σχήμα. Εξαιτίας της δύναμης F_1 η σφαίρα Α θα αποκτήσει επιτάχυνση προς τα αριστερά, συνεπώς πράγματι αρχικά επιβραδύνεται. Αλλά το αν μετά το πέρας της κρούσης θα έχει ταχύτητα προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά και τι μέτρο θα έχει η ταχύτητα αυτή, δεν μπορούμε να το ξέρουμε, αφού δεν γνωρίζουμε την ταχύτητα της σφαίρας Β. Η πρόταση δεν είναι σωστή.
- Η ελάχιστη κινητική ενέργεια που μπορεί να έχει η Α σφαίρα είναι η μηδενική στην περίπτωση που μηδενίζεται η ταχύτητά της και τελικά παραμένει ακίνητη. Θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, θα έχουμε για τις ταχύτητες των δύο σφαιρών μετά την κεντρική και ελαστική μεταξύ τους κρούση:



$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad (1)$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \quad (2)$$

Από την εξίσωση (1) θέτοντας $v'_1 = 0$ παίρνουμε:

$$0 = \frac{m - 3m}{m + 3m} v_1 + \frac{2 \cdot 3m}{m + 3m} v_2 \rightarrow -2v_1 + 6v_2 = 0 \rightarrow v_2 = \frac{v_1}{3}$$

Δηλαδή, πριν την κρούση και η σφαίρα Β είχε ταχύτητα προς τα δεξιά, όπως και η Α σφαίρα.

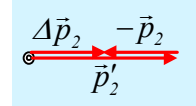
- Αντικαθιστώντας τώρα στην εξίσωση (2) βρίσκουμε την ταχύτητα της Β σφαίρας μετά την κρούση:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{2m}{m + 3m} v_1 + \frac{3m - m}{m + 3m} \cdot \frac{v_1}{3} = \frac{v_1}{2} + \frac{v_1}{6} = \frac{2}{3} v_1$$

Βλέπουμε δηλαδή η σφαίρα Β να έχει διπλασιάσει την ταχύτητά της, πράγμα που αντίστοιχα προκαλεί αύξηση της κινητικής της ενέργειας. Αλλά και αύξηση του μέτρου της ορμής της. Έτσι για τις ζητούμενες μεταβολές θα έχουμε:

$$\Delta K_2 = K_2' - K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{4v_1^2}{9} \right) - \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{1v_1^2}{9} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} m_2 v_1^2$$

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_2' - \vec{p}_2 \rightarrow \Delta p_2 = m_2 v_2' - m_2 v_2 = \frac{2}{3} m_2 v_1 - \frac{1}{3} m_2 v_1 = \frac{1}{3} m_2 v_1$$



$$|\Delta p_2| = \frac{1}{3} m_2 v_1$$

Και τα αντίστοιχα ποσοστά:

$$\pi_K = \frac{\Delta K_2}{K_2} 100\% = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} m_2 v_1^2}{\frac{1}{2} m_2 \frac{v_1^2}{9}} 100\% = 300\% \text{ και}$$

$$\pi_p = \frac{|\Delta p_2|}{|p_2|} 100\% = \frac{\frac{1}{3} m_2 v_1}{m_2 \frac{v_1}{3}} 100\% = 100\%$$

Σχόλιο:

Εναλλακτικά κάποιος θα μπορούσε να στηριχθεί στην ΑΔΟ και στην διατήρηση της κινητικής ενέργειας και να πει ότι η κινητική ενέργεια και η ορμή της Β σφαίρας, μετά την κρούση θα είναι:

$$K_2' = K_1 + K_2 \rightarrow \Delta K_2 = K_1 \text{ και}$$

$$p_2' = p_1 + p_2 \rightarrow \Delta p_2 = p_1$$

Αφού η Α σφαίρα παραμένει ακίνητη μετά την κρούση, με αποτέλεσμα η αύξηση της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Β να οφείλεται στην κινητική ενέργεια της σφαίρας Α, αλλά το ίδιο να συμβαίνει και στην μεταβολή της ορμής της.

dmargaris@gmail.com