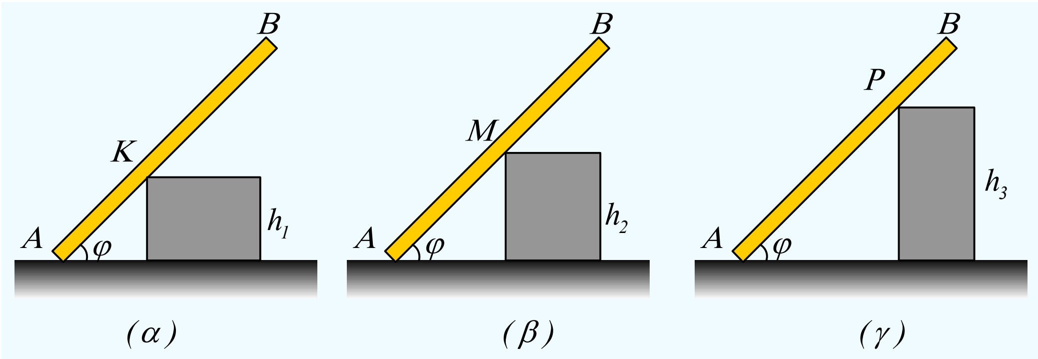
Η ισορροπία ή μη, μιας ράβδου

Μια ομογενής ράβδος ΑΒ, μήκους L, αφήνεται σε ισορροπήσει σε λείο οριζόντιο επίπεδο, σχηματίζοντας με το επίπεδο γωνία φ, όπου ημφ=0,6 και συνφ=0,8, ενώ στηρίζεται σε ένα βαρύ κιβώτιο ύψους h, το οποίο είναι προσκολλημένο στο επίπεδο.



i) Αν το ύψος του κιβωτίου είναι h_1 =0,2L, όπως στο σχήμα (α), να αποδείξετε ότι η ράβδος δεν θα ισορροπήσει.

ii) Αν το ύψος του κιβωτίου είναι h_2=0,3L, όπως στο σχήμα (β), να δείξετε ότι μπορεί να υπάρξει ισορροπία, αρκεί να αναπτυχθεί τριβή στο σημείο στήριξης Μ. Αν ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου και κιβωτίου είναι ίσος μ_s=μ=0,6 θα εξασφαλιστεί η ισορροπία;

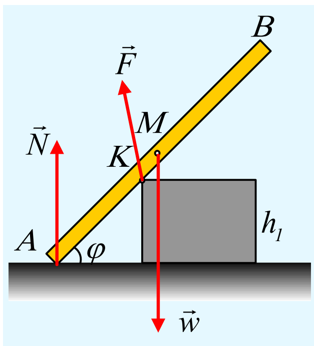
iii) Αν στο σχήμα (γ) h_3= 0,5L να υπολογιστεί ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου-κιβωτίου, ώστε η ράβδος να ισορροπεί.

Απάντηση:

i) Από το ημίτονο της γωνίας φ, παίρνουμε:

$$\eta\mu\varphi = \frac{h_1}{(AK)} \rightarrow (AK) = \frac{h_1}{\eta\mu\varphi} = \frac{0,2L}{0,6} = \frac{1}{3}L$$

Κατά συνέπεια το σημείο στήριξης Κ είναι μεταξύ του Α και του μέσου Μ της ράβδου, όπως στο διπλανό σχήμα. Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί βάρος και κάθετη αντίδραση από το λείο επίπεδο, δυνάμεις κατακόρυφες και μια άγνωστη δύναμη F από κιβώτιο στη ράβδο, στο σημείο Κ (και αυτή κατακόρυφη θα πρέπει να είναι για την ισορροπία, αλλά αυτή τη στιγμή δεν μας απασχολεί…) Αν πάρουμε τις ροπές των παραπάνω δυνάμεων, ως προς το σημείο στήριξης Κ (θετικές οι αριστερόστροφες), θα έχουμε:

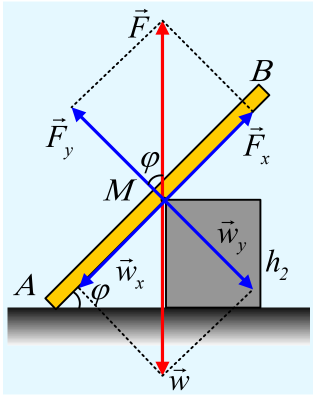


$$\Sigma\tau = \tau_N + \tau_F + \tau_w = -Nx_1 + 0 - wx_2 = -\left(Nx_1 + wx_2\right) < 0$$

Βλέπουμε ότι η συνολική ροπή δεν είναι μηδενική, συνεπώς η ράβδος δεν ισορροπεί. Αξίζει να τονισθεί ότι η συνθήκη ισορροπίας, μιλάει για Στ=0, ως προς οποιοδήποτε σημείο!

ii) Αν στο (β) σχήμα το σημείο στήριξης απέχει κατά x από το Α θα έχουμε:

$$\eta\mu\varphi=\frac{h_2}{x}\rightarrow x=\frac{h_2}{\eta\mu\varphi}=\frac{0,3L}{0,6}=\frac{1}{2}L$$



Δηλαδή το σημείο στήριξης είναι τώρα το μέσον Μ της ράβδου. Αλλά τότε θα μπορούσαμε να έχουμε ισορροπία, αν δεν ασκείται δύναμη στήριξης από το επίπεδο (N=0), αφού $\Sigma\tau_M=0$ και αναπτυσσόταν τριβή μεταξύ ράβδου και κιβωτίου, οπότε η δύναμη F, να ήταν κατακόρυφη, οπότε ΣF=0 και F=w=mg.

Έστω λοιπόν ότι η ράβδος ισορροπεί. Αναλύοντας τις δυνάμεις όπως στο σχήμα, θα πρέπει:

$$\Sigma F_y=0\rightarrow F_y=w_y=mg\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\ \ \kappa\alpha\iota$$
$$\Sigma F_x=0\rightarrow F_x=w_x=mg\cdot\eta\mu\varphi$$

Η συνιστώσα F_y αντιστοιχεί στην κάθετη αντίδραση του κιβωτίου, ενώ η F_x στη δύναμη τριβής που ασκείται στη ράβδο. Η μέγιστη στατική τριβή που μπορεί να ασκηθεί στη ράβδο, η οριακή τριβή, έχει μέτρο:

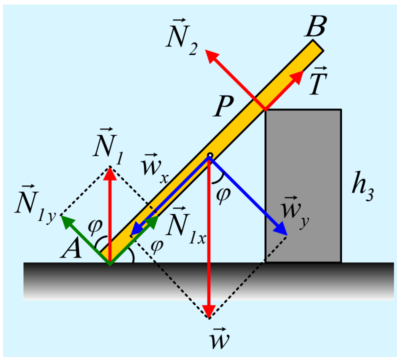
$$T_{o\rho}=\mu_s\cdot F_y=\mu_s\cdot mg\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=0,6\cdot mg\cdot 0,8=0,48mg$$

Ενώ η συνιστώσα F_x η οποία εξασφαλίζει την ισορροπία, πρέπει να έχει μέτρο:

$$F_x=w_x=mg\cdot\eta\mu\varphi=0,6mg>T_{o\rho}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η μέγιστη στατική τριβή είναι μικρότερη από την συνιστώσα του βάρους w_x με αποτέλεσμα η ράβδος να μην ισορροπεί, με τον συντελεστή τριβής που μας δόθηκε.

iii) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στη ράβδο, έχοντας αναλύσει το βάρος και την κάθετη αντίδραση του επιπέδου σε άξονες παράλληλο και κάθετο στη ράβδο. Από την συνθήκη ισορροπίας έχουμε:



$$\Sigma F_x=0\rightarrow mg\cdot\eta\mu\varphi-N_1\eta\mu\varphi-T=0\quad(1)$$

$$\Sigma F_y=0\rightarrow N_2+N_1\sigma\upsilon\nu\varphi-mg\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=0\quad(2)$$

$$\Sigma\tau=0\rightarrow\Sigma\tau_P=0\rightarrow mg\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot d_2-N_1\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot d_1=0\quad(3)$$

Αλλά παίρνοντας ξανά το ημίτονο της γωνίας φ, βρίσκουμε:

$$\eta\mu\varphi=\frac{h_3}{(AP)}\rightarrow(AP)=\frac{h_3}{\eta\mu\varphi}=\frac{0,5L}{0,6}=\frac{5}{6}L$$

Συνεπώς $d_1=(AP)=\frac{5}{6}L$ και $d_2=d_1-\frac{1}{2}L=\frac{1}{3}L$ οπότε από την (3) βρίσκουμε:

$$mg\cdot d_2-N_1\cdot d_1=0\rightarrow mg\cdot\frac{L}{3}=N_1\cdot\frac{5L}{6}\rightarrow N_1=0,4mg$$

Με αντικαταστάσεις τώρα στις (1) και (2) παίρνουμε:

$$mg\cdot\eta\mu\varphi-N_1\eta\mu\varphi-T=0\rightarrow T=mg\cdot\eta\mu\varphi-0,4mg\cdot\eta\mu\varphi=0,6mg\cdot\eta\mu\varphi=0,36\cdot mg$$

$$N_2 = mg \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi - N_1\sigma\upsilon\nu\varphi = 0{,}6mg \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 0{,}48mg$$

Για να ισορροπεί η ράβδος, θα πρέπει η παραπάνω τριβή να είναι στατική, δηλαδή μικρότερη ή ίση της οριακής, οπότε:

$$T \le T_{o\rho} \to T \le \mu_s N_2 \to \mu_s \ge \frac{T}{N_2} \to \mu_s \ge \frac{0{,}36mg}{0{,}48mg} \to$$
$$\mu_s \ge 0{,}75$$

Άρα ο μικρότερος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου και εμποδίου, για την παραπάνω ισορροπία, είναι $\mu_{s,min} = 0{,}75$.

Σχόλιο:

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι τα παραπάνω αποτελέσματα είναι ανεξάρτητα του μήκους και του βάρους της ράβδου. Αρκεί να είναι σταθερή η κλίση της ως προς το λείο οριζόντιο επίπεδο, με μεταβλητή, το ύψος του κιβωτίου-στηρίγματος.

dmargaris@gmail.com