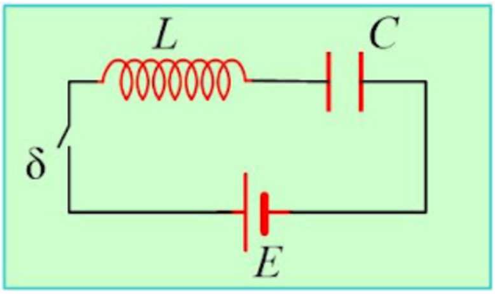
Η λύση μιας διαφορικής 2ης τάξης.



Η διαφορική εξίσωση στο κύκλωμα LC, όπως αυτό της ανάρτησης «Λίγα ακόμη για την φόρτιση πυκνωτή» , είναι:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{C}q=E$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q=\frac{E}{L}$$

Η εξίσωση αυτή είναι 2ης τάξης, μη ομογενής, αφού έχει μη μηδενικό 2ο μέλος.

Λύνουμε την αντίστοιχη ομογενή:

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q=0$$

Η οποία είναι όμοια με την εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή! Να την δούμε; Ποια είναι η συνθήκη για ΑΑΤ;

ΣF=-Dx! Δηλαδή:

mα+Dx=0 ή $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{D}{m}x=0$

Ορίζουμε την κυκλική συχνότητα $\omega^2=\frac{1}{LC}\to\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$, όμοια με την $\omega^2=\frac{D}{m}\to\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}$ της ααт.

Ας ανοίξουμε τώρα μια μεγάλη μαθηματική παρένθεση, για να επιλύσουμε **αναλυτικά** την διαφορική:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \quad (1)$$

όπου αυτό το x είναι η απομάκρυνση στην ΑΑΤ ή το φορτίο q σε μια ηλεκτρική ταλάντωση:

Η εξίσωση (1) είναι διαφορική και εμείς θέλουμε να βρούμε μια χαρακτηριστική εξίσωση που να την αντικαθιστά και να είναι αλγεβρική! Γι΄ αυτό δοκιμάζουμε μια λύση της μορφής:

$$x=x(t)=e^{\lambda t}$$

Γιατί τέτοιας μορφής; Διότι η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος θα παράγει ξανά την x!

Έτσι εδώ θα έχουμε:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda e^{\lambda t} \quad \text{και} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

οπότε η εξίσωση $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ γίνεται

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0 \to e^{\lambda t}\left(\lambda^2 + \omega^2\right) = 0 \to \lambda^2 + \omega^2 = 0 \to \lambda = \pm i\omega$$

Αλλά τότε μια **γενική** λύση της διαφορικής θα είναι:

$$x = \Gamma e^{i\omega t} + \Delta\, e^{-i\omega t} \quad (2)$$

Όπου οι συντελεστές Γ και Δ είναι εν γένει μιγαδικοί αριθμοί.

Με βάση τώρα τους τύπους του Euler:

$$e^{i\omega t} = \sigma\upsilon\nu(\omega t) + i\eta\mu(\omega t)$$
$$e^{-i\omega t} = \sigma\upsilon\nu(\omega t) - i\eta\mu(\omega t)$$

Η (2) γίνεται:

$$x = \Gamma\left(\sigma\upsilon\nu(\omega t) + i\eta\mu(\omega t)\right) + \Delta\left(\sigma\upsilon\nu(\omega t) - i\eta\mu(\omega t)\right) \to$$
$$x = \left(\Gamma + \Delta\right)\sigma\upsilon\nu(\omega t) + i\left(\Gamma - \Delta\right)\eta\mu(\omega t)$$

Αν τώρα επιλέξουμε κατάλληλη μιγαδική μορφή για τις σταθερές Γ και Δ, όπως:

$$\Gamma = \frac{A}{2} - i\frac{B}{2} \quad \text{και} \quad \Delta = \frac{A}{2} + i\frac{B}{2}$$

Τότε η τελευταία εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$x = \left(\Gamma + \Delta\right)\sigma\upsilon\nu(\omega t) + i\left(\Gamma - \Delta\right)\eta\mu(\omega t) = A\sigma\upsilon\nu(\omega t) + i\cdot(-iB)\eta\mu(\omega t) \to$$
$$x = A\sigma\upsilon\nu(\omega t) + B\eta\mu(\omega t) \quad (3)$$

Όπου οι συντελεστές Α και Β είναι πραγματικοί αριθμοί, αφού πραγματικός αριθμός είναι η απομάκρυνση σε μια αατ ή το φορτίο του πυκνωτή. Έτσι η εξίσωση (3) τελικά είναι η γενική λύση της ομογενούς την οποία δίνουμε πάντα, χωρίς όλη την προηγούμενη απόδειξη… Εδώ κλείνουμε την παρένθεση.

Επιστρέφουμε λοιπόν στην γενική λύση της ομογενούς για το φορτίο η οποία θα έχει τη μορφή:

$$q = A\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t) + B\cdot\eta\mu(\omega t)$$

Αντίστοιχη της απομάκρυνσης της αατ:

$$x = A\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t) + B\cdot\eta\mu(\omega t)$$

Όπου οι συντελεστές Α και Β καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Τώρα εμείς, για να μην μπλέξουμε με εξισώσεις που περιέχουν συνημίτονο και ημίτονο, το παραπάνω άθροισμα προτιμάμε να το αντικαθιστούμε με την εξίσωση (η απόδειξη είναι καθαρά τριγωνομετρική και δεν μας απασχολεί τη στιγμή αυτή):

$$q = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \text{ αντίστοιχη της γνωστής μας εξίσωσης } x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Όπου χρησιμοποιούμε την αρχική φάση φ_0.

Πάμε τώρα στην μη ομογενή και βρίσκουμε μια μερική λύση, όπου αφού το 2ο μέλος είναι σταθερό, αυτή θα είναι μια σταθερή ειδική λύση, έστω Q. Αλλά τότε:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \text{, οπότε } \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = \frac{E}{L} \rightarrow Q = EC \quad (4)$$

Αλλά τότε η γενική εξίσωση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι της μορφής:

$$q = Q + A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Ας δούμε τώρα τις αρχικές συνθήκες:

Για t=0, το φορτίο του πυκνωτή είναι μηδενικό, όπως μηδενική είναι και η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο, λόγω αυτεπαγωγής, οπότε αν θεωρήσουμε θετική την ένταση του ρεύματος που θα αρχίσει να διαρρέει το κύκλωμα για $t=0^+$, θα πάρουμε:

$$q = Q + A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \rightarrow 0 = CE + A\eta\mu\varphi_0 \quad (5)$$

Ενώ με παραγώγιση:

$$\frac{dq}{dt} = i = 0 \rightarrow i = A \cdot \omega \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{t=0, i=0} A \cdot \omega \cdot \sigma\upsilon\nu(\varphi_0) = 0 \rightarrow$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \quad \acute{\eta} \quad \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

Αλλά για να πάρουμε θετική ένταση για $t=0^+$ θα πάρουμε ως αρχική φάση το 3π/2, αφού τότε το συνημίτονο της φάσης ωt+3π/2, θα είναι θετικό (θα είμαστε στο 4ο τεταρτημόριο). Έτσι από την εξίσωση (5) παίρνουμε:

$$0 = CE + A\eta\mu\varphi_0 \rightarrow CE + A \cdot (-1) = 0 \rightarrow A = CE$$

Και η εξίσωση του φορτίου παίρνει την τελική της μορφή:

$$q = CE + CE \cdot \eta\mu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = CE - CE \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t)$$

Ενώ η εξίσωση της έντασης του ρεύματος, γίνεται:

$$i = A \cdot \omega \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \varphi_0\right) = CE \cdot \omega \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = \omega CE \cdot \eta\mu\left(\omega t\right)$$

dmargaris@gmail.com