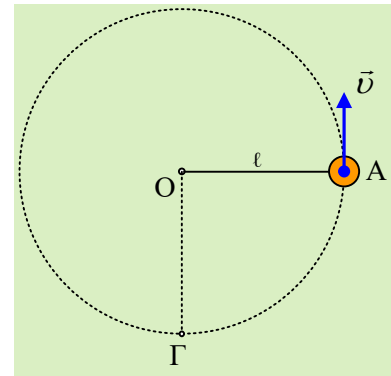


Η ορμή και οι μεταβολές της σε μια ΟΚΚ.

Μια σφαίρα μάζας $m=0,5\text{kg}$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένη στο άκρο νήματος μήκους $\ell=0,9\text{m}$, διαγράφοντας κυκλική τροχιά κέντρου O , με γραμμική ταχύτητα σταθερού μέτρου $v=0,6\text{m/s}$ (το σχήμα σε κάτοψη).



- Να βρεθεί η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής (διεύθυνση, φορά και μέτρο) της σφαίρας τη χρονική στιγμή $t_0=0$, όπου η σφαίρα περνά από τη θέση A .
- Να βρεθεί το μήκος του τόξου που διαγράφει η σφαίρα μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1=(3\pi/2)\text{ s}$, καθώς και η θέση της B , τη στιγμή αυτή. Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής της σφαίρας στο χρονικό διάστημα $0-t_1$.
- Να υπολογιστεί η χρονική στιγμή t_2 όπου η σφαίρα φτάνει στη θέση Γ , όπου η ακτίνα $O\Gamma$ είναι κάθετη στην OA , για 3^η φορά. Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής της σφαίρας μεταξύ των θέσεων B και Γ .

Απάντηση:

- Καθώς η σφαίρα περνά από τη θέση A , έχει ταχύτητα εφαπτόμενη στη τροχιά, οπότε την ίδια κατεύθυνση έχει και η ορμή της σφαίρας p_0 , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για το μέτρο της ορμής έχουμε:

$$p_0 = mv = 0,5 \cdot 0,6 \text{ kgm/s} = 0,3 \text{ kgm/s}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής, από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα, είναι ίσος με τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στη σφαίρα. Αλλά στην περίπτωση της παραπάνω οριζόντιας κυκλικής κίνησης, η συνισταμένη δύναμη είναι η τάση του νήματος, η οποία είναι **και** η κεντρομόλος δύναμη που δρα στη σφαίρα. Έτσι το διάνυσμα $\frac{d\vec{p}}{dt}$ στη θέση A , έχει τη διεύθυνση της ακτίνας, με φορά προς το κέντρο O της τροχιάς, με μέτρο:

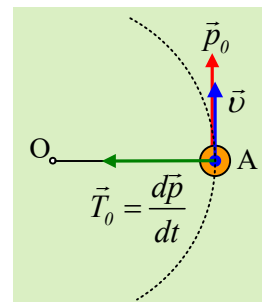
$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = |\Sigma F| = |T_0| = m \frac{v^2}{R} = 0,5 \cdot \frac{0,6^2}{0,9} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,2 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

- Το μήκος του τόξου που διατρέχει η σφαίρα συνδέεται με το μέτρο της ταχύτητας με τη σχέση:

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow s_l = vt_l = 0,6 \cdot \frac{3\pi}{2} \text{ m} = \frac{9\pi}{10} \text{ m} \approx 2,8 \text{ m}$$

Μπορούμε να βρούμε τον αριθμό των περιστροφών της σφαίρας μέχρι τη στιγμή t_1 , αν διαιρέσουμε το παραπάνω μήκος του τόξου με την περιφέρεια του κύκλου (το μήκος του τόξου ενός κύκλου).

$$N_l = \frac{s_l}{s_k} = \frac{s_l}{2\pi R} = \frac{\frac{9\pi}{10}}{2\pi \cdot 0,9} = 0,5$$



Δηλαδή η σφαίρα τη στιγμή t_1 έχει διαγράψει μισό κύκλο, φτάνοντας στο σημείο B, αντιδιαμετρικό το A, όπως στο σχήμα.

Για τη μεταβολή της ορμής μεταξύ των θέσεων A και B, έχουμε:

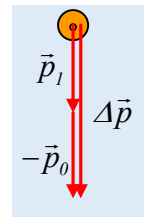
$$\Delta \vec{p}_l = \vec{p}_l - \vec{p}_0 = \vec{p}_l + (-\vec{p}_0) \quad (1)$$

Έτσι θεωρώντας την αρχική ορμή ως θετική και λαμβάνοντας υπόψη ότι το μέτρο της ορμής παραμένει σταθερό, θα πάρουμε:

$$\Delta p_l = p_l - p_0 = -0,3 \text{ kgm/s} - 0,3 \text{ kgm/s} = -0,6 \text{ kgm/s}$$

Όπου το αρνητικό αποτέλεσμα μας λέει ότι η μεταβολή της ορμής έχει αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική ορμή στη θέση A.

Εναλλακτικά η εξίσωση (1), μπορεί να διαβαστεί ότι το διάνυσμα $\Delta \vec{p}_l$ προκύπτει ως το διανυσματικό άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{p}_l$ και $-\vec{p}_0$. Αλλά τότε με βάση το διπλανό σχήμα μπορούμε να βρούμε τη μεταβολή της ορμής, με διανυσματικό άθροισμα.



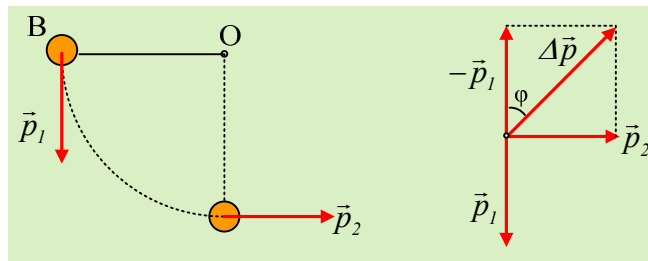
- iii) Η σφαίρα φτάνει στη θέση Γ για πρώτη φορά, έχοντας το νήμα διαγράψει γωνία $3\pi/2$ ή ισοδύναμα έχοντας διαγράψει τόξο μήκους $3/4$ της περιφέρειας του κύκλου. Τη 2^η φορά που φτάνει θα έχει διατρέξει επιπλέον ένα κύκλο και την 3^η φορά ακόμη έναν. Συνεπώς αν s_k η περιφέρεια του κύκλου, το συνολικό μήκος του τόξου θα είναι ίσο:

$$s_2 = 2s_k + \frac{3}{4}s_k = \frac{11}{4}s_k = \frac{11}{4}2\pi R = 5,5\pi R \rightarrow$$

$$v = \frac{s_2}{t_2} \rightarrow$$

$$t_2 = \frac{s_2}{v} = \frac{5,5\pi \cdot 0,9\text{m}}{0,6\text{m/s}} = 8,25\pi \text{ s} = 25,9\text{s}$$

Σχεδιάζουμε τα διανύσματα της ορμής για τις θέσεις B και Γ, όπως στο πρώτο σχήμα παρακάτω, οπότε για την μεταβολή της ορμής μεταξύ των δύο θέσεων προκύπτει:



$$\Delta \vec{p}_{l2} = \vec{p}_2 - \vec{p}_l = \vec{p}_2 + (-\vec{p}_l)$$

Για το μέτρο της μεταβολής έχουμε:

$$\Delta p_{l2} = \sqrt{p_l^2 + p_2^2} = \sqrt{2p_l^2} = p_l\sqrt{2} = p_0\sqrt{2} = 0,3\sqrt{2}\text{ kgm/s}$$

Ενώ η κατεύθυνσή της σχηματίζει γωνία $\varphi=45^\circ$ με την διεύθυνση της αρχικής ορμής, ίδια με την κατεύθυνση του διανύσματος $-\vec{p}_I$ (το παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο).

Σχόλιο:

Παραπάνω υπολογίσαμε θέσεις και χρόνους χρησιμοποιώντας γραμμικά μεγέθη, όπως ταχύτητα και μήκη τόξων. Θα μπορούσαμε να δουλέψουμε, εξίσου σωστά, χρησιμοποιώντας γωνιακά μεγέθη, όπως γωνιακή ταχύτητα και γωνίες. Μπορείτε να το κάνετε;

dmargaris@gmail.com