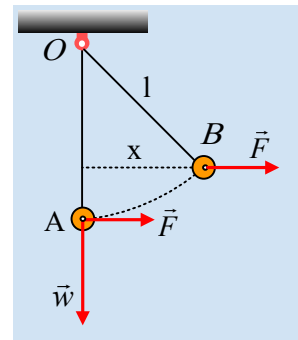


Η στροφορμή και οι ρυθμοί μεταβολής της

Μια σφαίρα μάζας $m=2\text{kg}$, η οποία θεωρείται υλικό σημείο αμελητέας ακτίνας, κρέμεται στο άκρο μη εκτατού νήματος μήκους $l=2\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σε σταθερό σημείο O , στη θέση A . Σε μια στιγμή ασκούμε στη σφαίρα μια σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, μέτρου $F=10\text{N}$, με αποτέλεσμα μετά από λίγο να φτάνει στην θέση B , έχοντας εκτραπεί οριζόντια κατά $x=1,2\text{m}$.



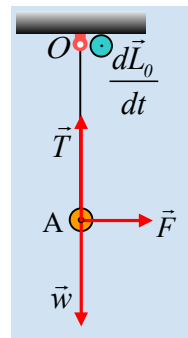
- i) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας ως προς το O , αμέσως μόλις ασκηθεί η δύναμη $\vec{F}$.
 - ii) Να αποδειχθεί ότι το έργο της δύναμης κατά την παραπάνω μετακίνηση κατά μήκος του τόξου AB , είναι ίσο με $W=F \cdot x$.
 - iii) Να υπολογισθεί η στροφορμή της σφαίρας, καθώς και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ως προς το O , στη θέση B .
 - iv) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας στη θέση B ;
- Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα, μόλις ασκηθεί η δύναμη $\vec{F}$. Για τον ζητούμενο ρυθμό έχουμε (οι αριστερόστροφες ροπές θεωρούνται θετικές):

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = \tau_w + \tau_T + \tau_F = 0 + 0 + Fl = 10 \cdot 2 \text{kgm}^2 / \text{s}^2 = 20 \text{kgm}^2 / \text{s}^2$$

Διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, στο O , με φορά προς τον αναγνώστη, όπως στο σχήμα.



- ii) Έστω ένα στοιχειώδες τόξο $d\vec{s}$ (το οποίο θεωρούμε ευθύγραμμο) το οποίο σχηματίζει γωνία α με την διεύθυνση της δύναμης $\vec{F}$. Το στοιχειώδες έργο της δύναμης για την μετατόπιση κατά μήκος του τόξου αυτού θα είναι:

$$dW = F \cdot ds \cdot \sin \alpha = F \cdot ds_x = F \cdot dx$$

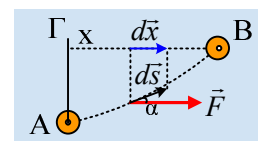
Όπου ds_x η προβολή του ds στην οριζόντια διεύθυνση. Αλλά τότε το ολικό έργο της δύναμης κατά μήκος του τόξου AB , θα είναι ίσο:

$$W_{AB} = \sum dW = \sum F \cdot dx = F \sum dx = F \cdot x$$

- iii) Εφαρμόζουμε για την σφαίρα το Θ.Μ.Κ.Ε. από την θέση A , μέχρι τη θέση B :

$$K_B - K_A = W_T + W_w + W_F \quad (1)$$

Όμως το έργο της τάσης είναι μηδενικό, αφού η δύναμη είναι κάθετη στη μετατόπιση, ενώ το έργο του



βάρους, μιας συντηρητικής δύναμης ίσο $W_w = -mgh$, όπου h η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των σημείων A και B. Αλλά αν θ η γωνία εκτροπής του νήματος στη θέση B, τότε:

$$\eta\mu\theta = \frac{x}{l} = \frac{1,2m}{2m} = 0,6 \rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = 0,8 \rightarrow$$

$$h = l - (OG) = l - y = l - l\sigma\upsilon\nu\theta = 2m - 2m \cdot 0,8 = 0,4m$$

Οπότε επιστρέφοντας στην εξίσωση (1), παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = 0 - mgh + Fx \rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2Fx}{m} - 2gh} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 1,2}{2} - 2 \cdot 10 \cdot 0,4} \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}$$

Αλλά τότε η στροφορμή της σφαίρας ως προς το κέντρο O της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει, είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα έξω και μέτρο:

$$L = mvl = 2 \cdot 2 \cdot 2 \text{ kgm}^2/\text{s} = 8 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

Ενώ για τον ρυθμό μεταβολής της έχουμε (θετικές οι αριστερόστροφες ροπές):

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = \tau_w + \tau_N + \tau_F = -mgx + Fy = (-2 \cdot 10 \cdot 1,2 + 10 \cdot 1,6) \text{ kgm}^2/\text{s}^2 = -8 \text{ kgm}^2/\text{s}^2$$

Η αρνητική τιμή μας λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής θα είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα, όπως έχει σχεδιαστεί στο παραπάνω σχήμα.

- iv) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας είναι ίσος με το άθροισμα των ισχύων των ασκούμενων δυνάμεων:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d\Sigma W}{dt} = \frac{dW_T}{dt} + \frac{dW_w}{dt} + \frac{dW_F}{dt} = 0 - W_\epsilon \cdot v + F_\epsilon \cdot v$$

Όπου w_ϵ και F_ϵ οι συνιστώσες των δύο δυνάμεων στην εφαπτομενική διεύθυνση στη θέση B, αφού οι άλλες δύο συνιστώσες στη διεύθυνση της ακτίνας, δεν παράγουν έργο. Αλλά τότε και με την βοήθεια του διπλανού σχήματος παίρνουμε:

$$\frac{dK}{dt} = F_\epsilon \cdot v - w_\epsilon \cdot v = (F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - mg \cdot \eta\mu\theta)v \rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = (10 \cdot 0,8 - 2 \cdot 10 \cdot 0,6) \cdot 2 \text{ J/s} = -8 \text{ J/s}$$

