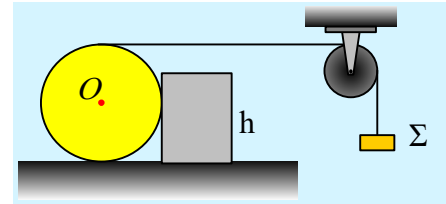


Κάθε εμπόδιο για καλό;

Οι περικοπές στην ύλη επιβάλλουν τροποποιήσεις...

Γύρω από ένα κύλινδρο ακτίνας $R=0,4\text{m}$ και μάζας $M=10\text{kg}$ τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα, το οποίο αφού περάσουμε από μια αβαρή τροχαλία, στο άλλο άκρο του δένουμε ένα σώμα Σ μάζας $m_1=1\text{kg}$.

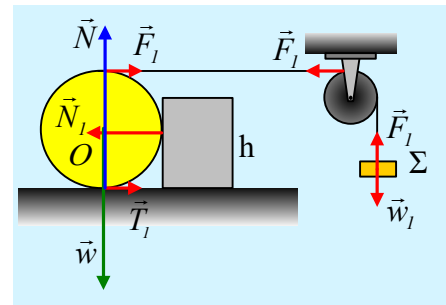


Αφήνουμε το σώμα Σ ελεύθερο και το σύστημα ισορροπεί, αφού ο κύλινδρος εμποδίζεται να κινηθεί, από ένα εμπόδιο ύψους $h>R$. Οι συντελεστές τριβής μεταξύ κυλίνδρου και εδάφους είναι $\mu_s=\mu=0,2$, ενώ δεν εμφανίζεται τριβή μεταξύ κυλίνδρου και εμποδίου. Το νήμα μεταξύ κυλίνδρου και τροχαλίας είναι οριζόντιο και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$.

- i) Να υπολογιστούν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο.
- ii) Αντικαθιστούμε το σώμα Σ με άλλο Σ' μάζας $m_2=3\text{kg}$ και παρατηρούμε ότι αυτό κινείται προς τα κάτω με σταθερή επιτάχυνση $a=1,25\text{m/s}^2$.
- α) Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης που ασκείται στον κύλινδρο από το εμπόδιο στη διάρκεια της κίνησης του σώματος Σ' .
- β) Να βρεθεί η συνολική ροπή που επιταχύνει στροφικά τον κύλινδρο.
- γ) Ποια η γωνιακή του ταχύτητα και ποιος ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου, τη χρονική στιγμή $t_1=4\text{s}$;

Απάντηση:

Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε κύλινδρο και σώμα Σ , όπου F_1 η τάση του νήματος και N_1 η δύναμη που δέχεται ο κύλινδρος από το εμπόδιο, κάθετη στην επιφάνεια επαφής, συνεπώς οριζόντια, w και w_1 τα δυο βάρη, N η κάθετη δύναμη του επιπέδου και T_1 η στατική τριβή που ασκείται στον κύλινδρο.



- i) Το σώμα Σ ισορροπεί άρα $\Sigma F=0 \rightarrow F_1=w_1=m_1g=10\text{N}$

Αλλά και ο κύλινδρος ισορροπεί συνεπώς:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \rightarrow F_1 + T_1 - N_1 = 0 \quad (1) \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow N = w = Mg = 100\text{N} \end{array} \right. \xrightarrow{(1),(2)} N_1 = F_1 + T_1 = 2F_1 = 20\text{N}$$

$$\Sigma \tau_o = 0 \rightarrow T_1 \cdot R - F_1 \cdot R = 0 \rightarrow T_1 = F_1 = 10\text{N} \quad (2)$$

- ii) Αν το σώμα Σ' κινείται προς τα κάτω, θα ξετυλίγεται το νήμα που έχουμε τυλίξει γύρω από τον κύλινδρο, ο οποίος θα αρχίζει να περιστρέφεται κατά την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο και στο σώμα Σ' είναι ξανά, όπως στο παραπάνω σχήμα, όπου η τάση του

νήματος F_1 είναι η ίδια δεξιά και αριστερά της τροχαλίας, αφού αυτή θεωρείται αβαρής, ενώ η τριβή είναι τώρα τριβή ολίσθησης με μέτρο:

$$T = \mu \cdot N = \mu Mg = 20 \text{ N}$$

α) Για την κίνηση του σώματος Σ' έχουμε:

$$\Sigma F = m_2 a \rightarrow w_2 - F_2 = m_2 a \rightarrow$$

$$F_2 = m_2 (g - a) = 3(10 - 1,25) \text{ N} = 26,25 \text{ N}$$

Ο κύλινδρος δεν μετακινείται στην οριζόντια διεύθυνση, οπότε:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow N_2 - F_2 - T = 0 \rightarrow N_2 = F_2 + T = 26,25 \text{ N} + 20 \text{ N} = 46,25 \text{ N}$$

β) Η ολική ροπή των δυνάμεων ως προς το κέντρο μάζας O του κυλίνδρου είναι ίση: (οι δεξιόστροφες ροπές λαμβάνονται θετικές).

$$\Sigma \tau = \tau_w + \tau_N + \tau_{N_2} + \tau_{F_2} + \tau_T = 0 + 0 + 0 + F_2 \cdot R - T \cdot R = (F_2 - T) \cdot R \rightarrow$$

$$\Sigma \tau = (26,25 - 20) \cdot 0,4 \text{ Nm} = 2,5 \text{ Nm}$$

γ) Όλα τα σημεία του νήματος έχουν κάθε στιγμή την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα, συνεπώς και η γραμμική ταχύτητα του ανώτερου σημείου του κυλίνδρου είναι κατά μέτρο ίση με την ταχύτητα του σώματος Σ' .

$$v_{\Sigma'} = v_{\gamma\phi} = \omega R \rightarrow \omega = \frac{at}{R} = \frac{1,25 \cdot 4}{0,4} \text{ rad/s} = 12,5 \text{ rad/s}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση, παίρνουμε:

$$v_{\Sigma'} = \omega R \rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R \rightarrow a = a_{\gamma\omega v} R \rightarrow$$

$$\frac{d\omega}{dt} = a_{\gamma\omega v} = \frac{a}{R} = \frac{1,25}{0,4} \text{ rad/s}^2 = 3,125 \text{ rad/s}^2$$

