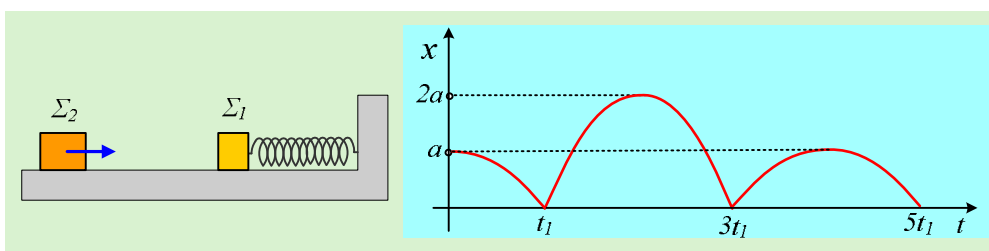


Κρούσεις και ταλαντώσεις

Κάτι σαν φύλλο εργασίας

Ένα σώμα Σ_1 είναι δεμένο στο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k και συγκρατείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, έχοντας συμπιέσει το ελατήριο κατά a . Ένα δεύτερο σώμα Σ_2 κινείται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου πλησιάζοντας το σώμα Σ_1 . Σε μια στιγμή $t_0=0$, αφήνουμε το Σ_1 να ταλαντωθεί και στο διπλανό σχήμα βλέπετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσής του από τη θέση ισορροπίας, σε συνάρτηση με το χρόνο, όπου κάποια στιγμή τα δυο σώματα συγκρούονται μετωπικά.



Αντλώντας πληροφορίες από το παραπάνω διάγραμμα $x=f(t)$, να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις, δίνοντας και σύντομες δικαιολογήσεις:

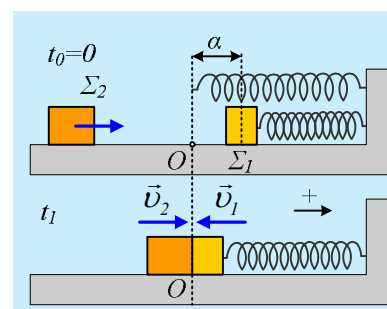
- i) Να εξηγήσετε γιατί έχουμε κρούση των δύο σωμάτων τη στιγμή t_1 . Σε ποια θέση έγινε η κρούση αυτή;
- ii) Να εξηγήσετε γιατί η παραπάνω κρούση των δύο σωμάτων δεν μπορεί να είναι πλαστική.
- iii) Πόσες κρούσεις μεταξύ των δύο σωμάτων έχουμε, μέχρι τη στιγμή $4t_1$;

Αν οι κρούσεις μεταξύ των σωμάτων είναι ελαστικές:

- iv) Σε τι ποσοστό αυξήθηκε η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Σ_1 , λόγω της πρώτης κρούσης;
- v) Να υπολογιστεί το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 το οποίο μεταφέρεται στο Σ_1 , κατά την κρούση αυτή.
- vi) Να υπολογιστεί συνάρτησε της σταθεράς του ελατηρίου k και της αρχικής του συσπείρωσης a , η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 , τις χρονικές στιγμές $t=0$ και $t'=4t_1$.
- vii) Να αποδειχτεί ότι το σώμα Σ_2 έχει τριπλάσια μάζα από το σώμα Σ_1 .
- viii) Ποιο από τα δύο σώματα έχει μεγαλύτερη κατά μέτρο ταχύτητα, ελάχιστα πριν την πρώτη κρούση;

Απάντηση:

- i) Με βάση το διάγραμμα $x=x(t)$ το σώμα ξεκινά από απομάκρυνση $x=+a$, άρα η προς τα δεξιά κατεύθυνση θεωρείται θετική. Συνεπώς τη στιγμή t_1 που το σώμα φτάνει στη θέση ισορροπίας (και θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου), έχουμε κρούση, αφού αντί να συνεχίσει την κίνησή του



προς τα αριστερά επιμηκύνοντας το ελατήριο, κινείται ξανά προς τα δεξιά και μάλιστα αυξάνοντας την ταχύτητά του, αφού θα ταλαντωθεί τώρα με διπλάσιο πλάτος $2a$.

- ii) Η περίοδος ταλάντωσης ενός σώματος στο άκρο ελατηρίου, όπως στο σχήμα, δίνεται από την εξίσωση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1)$$

Στο διάγραμμα που μας δίνεται ισχύει για τις περιόδους ταλάντωσης, πριν και μετά την πρώτη κρούση:

$$t_1 = \frac{1}{4}T_\pi \text{ ενώ } 3t_1 - t_1 = \frac{1}{2}T_\mu \rightarrow 2t_1 = \frac{1}{2}T_\mu \rightarrow t_1 = \frac{1}{2}T_\mu \rightarrow T_\pi = T_\mu$$

πράγμα που σημαίνει ότι η περίοδος ταλάντωσης πριν την κρούση, είναι ίση με την περίοδο μετά την κρούση. Αν η κρούση ήταν πλαστική θα είχαμε αλλαγή στην περίοδο, με βάση τη σχέση (1), πράγμα που δεν συμβαίνει, άρα η κρούση δεν είναι πλαστική.

- iii) Με βάση όσα ειπώθηκαν στο i) ερώτημα, έχουμε ξανά κρούση και απότομη αλλαγή στην ταλάντωση του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή $3t_1$, όπου ενώ το Σ_1 κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου $u_1 = \omega A = \omega \cdot 2a$, ξαφνικά το βλέπουμε να κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου $u'_1 = \omega \cdot a = \frac{1}{2}u_1$.

Αλλά τότε μέχρι τη στιγμή $4t_1$ έχουμε δύο κρούσεις στην ίδια θέση ισορροπίας $x=0$. Μια τη στιγμή t_1 και μια τη στιγμή $3t_1$.

- iv) Το ποσοστό αύξησης της ενέργειας ταλάντωσης του Σ_1 εξαιτίας της πρώτης κρούσης, είναι:

$$\pi = \frac{\Delta E}{E_1} 100\% = \frac{\frac{1}{2}k(2a)^2 - \frac{1}{2}ka^2}{\frac{1}{2}ka^2} 100\% = \frac{4a^2 - a^2}{a^2} 100\% = 300\%$$

- v) Αφού οι δυο κρούσεις έγιναν στην ίδια θέση, το σώμα Σ_2 παρέμεινε στη θέση αυτή ακίνητο μετά την πρώτη κρούση. Αλλά τότε μετέφερε όλη του την κινητική ενέργεια στο σώμα Σ_1 ή αλλιώς μετέφερε το 100% της κινητικής του ενέργειας στο Σ_1 .
- vi) Το σώμα Σ_1 μετά την δεύτερη κρούση, ταλαντώνεται ξανά με πλάτος a , όσο ήταν το αρχικό πλάτος, άρα έχει και την ίδια ενέργεια ταλάντωσης. Πράγμα που σημαίνει ότι το Σ_2 ξαναπήρε την ενέργεια που είχε αρχικά, στη διάρκεια της δεύτερης κρούσης. Πόση ήταν αυτή; Ίση με την αύξηση της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 , που προκάλεσε η πρώτη κρούση:

$$K_2 = \Delta K_1 = \Delta E_1 = \frac{1}{2}k(2a)^2 - \frac{1}{2}ka^2 = 3 \cdot \frac{1}{2}ka^2$$

- vii) Εστιάζουμε στην 2^η μετωπική κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων όπου το δεύτερο ήταν αρχικά ακίνητο, ενώ το Σ_1 κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα (αλγεβρικής) τιμής $u_1 = -2\omega \cdot a$ και μετά την κρούση

αποκτά ταχύτητα προς τα δεξιά ίση με $u'_1 = \omega \cdot \alpha$. Αλλά για την ταχύτητα αυτή ισχύει η εξίσωση:

$$u'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \rightarrow \omega \alpha = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (-2\omega \alpha) \rightarrow m_1 + m_2 = -2m_1 + 2m_2 \rightarrow$$

$$m_2 = 3m_1$$

viii) Για τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωμάτων, πριν την πρώτη κρούση, έχουμε:

$$v_1 = \omega \cdot \alpha = u'_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \cdot a$$

Ενώ:

$$K_2 = 3 \cdot \frac{1}{2} k a^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{3k a^2}{m_2}} = \sqrt{\frac{3k}{3m_1}} \cdot \alpha = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \cdot \alpha = v_1$$

Βλέπουμε δηλαδή τα δυο σώματα να συγκρούονται έχοντας αντίθετες ταχύτητες (ίσων μέτρων).

dmargaris@gmail.com