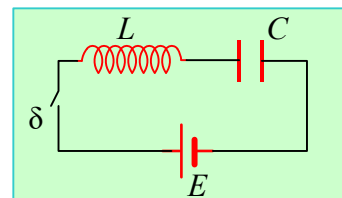


Λίγα ακόμη για την φόρτιση πυκνωτή.

Σαν συνέχεια της ανάρτησης «Φόρτιση πυκνωτή», ας αντικαταστήσουμε τον αντιστάτη από ένα πηνίο, αρχικά ιδανικό και στη συνέχεια με ένα πηνίου που έχει κάποια αντίσταση R.

Εφαρμογή 1^η:

Στο διπλανό κύκλωμα το ιδανικό πηνίο έχει αυτεπαγωγή $L=2\text{mH}$ και ο αφόρτιστος πυκνωτής χωρητικότητα $C=20\mu\text{F}$, ενώ η ιδανική πηγή έχει $E=10\text{V}$ ($r=0$). Σε μια στιγμή κλείνουμε το διακόπτη. Να βρεθούν σε συνάρτηση με το χρόνο:



- i) Το φορτίο του πυκνωτή.
- ii) Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.

Ποιες οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις;

Απάντηση:

Εφαρμόζοντας το 2^ο κανόνα του Kirchhoff, στο κύκλωμα μετά το κλείσιμο του διακόπτη, έχουμε:

$$E - L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \quad \text{ή}$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q - E = 0 \quad (1)$$

- i) Η παραπάνω εξίσωση, περιγράφει αρμονική μεταβολή του φορτίου, που απλά ο σταθερός όρος, τροποποιεί λίγο την λύση, η οποία είναι της μορφής:

$$q = Q_1 + Q_0 \eta \mu(\omega t + \phi_0)$$

όπου, με βάση τις αρχικές συνθήκες ($t=0$, $q=0$ και $i=0$) παίρνουμε: $Q_1 = Q_0 = CE$ και $\phi_0 = \frac{3\pi}{2}$. Έτσι η

εξίσωση του φορτίου παίρνει τη μορφή:

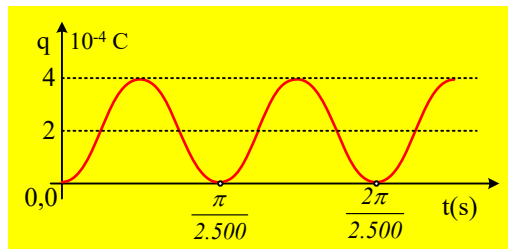
$$q = CE + CE \eta \mu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.})$$

Όπου $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5000 \text{ rad/s}$ και η εξίσωση γίνεται:

$$q = 2 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4} \eta \mu\left(5000t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{ή}$$

$$q = 2 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-4} \sigma \upsilon \nu(5000t) \quad (\text{S.I.}) \quad (2)$$

Ενώ η γραφική παράσταση είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.

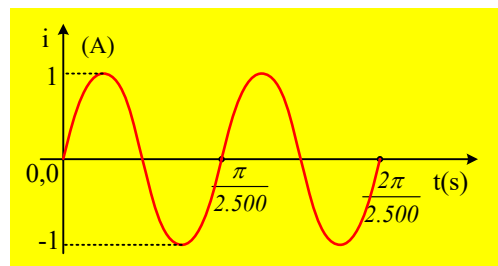


ii) Παραγωγίζοντας τώρα την (2) παίρνουμε:

$$i = \frac{dq}{dt} = \left(CE + CE\eta\mu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \right)' = CE\omega\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ ή}$$

$$i = 1 \cdot \eta\mu(5000t) \text{ (S.I.)}$$

Με αντίστοιχη γραφική παράσταση:



Συμπέρασμα:

Το κύκλωμα, αν αγνοήσουμε τις αντιστάσεις των αγωγών και την εκπομπή ΗΜ ακτινοβολίας, εκτελεί αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση. Η παρουσία του πηνίου, έχει σαν αποτέλεσμα λόγω αυτεπαγωγής, ο πυκνωτής να υπερφορτίζεται σε διπλάσιο φορτίο ($2CE$), οπότε έχουμε μια ταλάντωση του φορτίου του πυκνωτή μεταξύ των τιμών μηδέν και $2CE$, γύρω από την τιμή CE , όπου ήταν το φορτίο κατά την πλήρη φόρτιση του πυκνωτή στην προηγούμενη ανάρτηση, με την χρήση αντίστασης, αντί για πηνίο.

Και αν το κύκλωμα περιέχει και αντίσταση R (ή το πηνίο είναι μη ιδανικό);

Εφαρμογή 2':

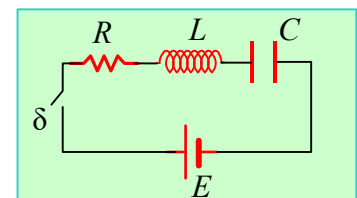
Στο διπλανό κύκλωμα το ιδανικό πηνίο έχει αυτεπαγωγή $L=2\text{mH}$ και ο αφόρτιστος πυκνωτής χωρητικότητα $C=20\mu\text{F}$, ενώ η ιδανική πηγή έχει ΗΕΔ $E=10\text{V}$. Σε μια στιγμή $t=0$ κλείνουμε το διακόπτη.

Να βρεθεί το φορτίο του πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο όταν ο αντιστάτης έχει αντίσταση:

i) $R=R_1=2\Omega$.

ii) $R=R_2=40\Omega$

Να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.



Απάντηση:

Εφαρμόζοντας το 2^ο κανόνα του Kirchhoff παίρνουμε:

$$E - iR - L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \rightarrow$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q - E = 0 \quad (8)$$

Ποια είναι η λύση της παραπάνω εξίσωσης; Η εξίσωση αυτή είναι γραμμική ομογενής 2^{ας} τάξεως και η λύση της εξαρτάται από την τιμή του λόγου $\Lambda = \frac{R}{2L}$. Έτσι:

Αν $\Lambda < \omega_0$ ή

$$\frac{R}{2L} < \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \text{ή}$$

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

ή $R < 20\Omega$,

τότε το κύκλωμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με εξίσωση φορτίου (λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες, όπου για $t=0$, $q=0$ και $i=0$):

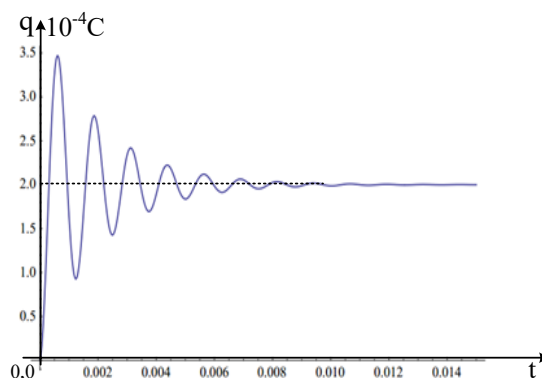
$$q = Q_0 + Q_0 \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \eta\mu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (9)$$

$$\text{με } Q_0 = CE \text{ και } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \approx 5000 \text{ rad/s}$$

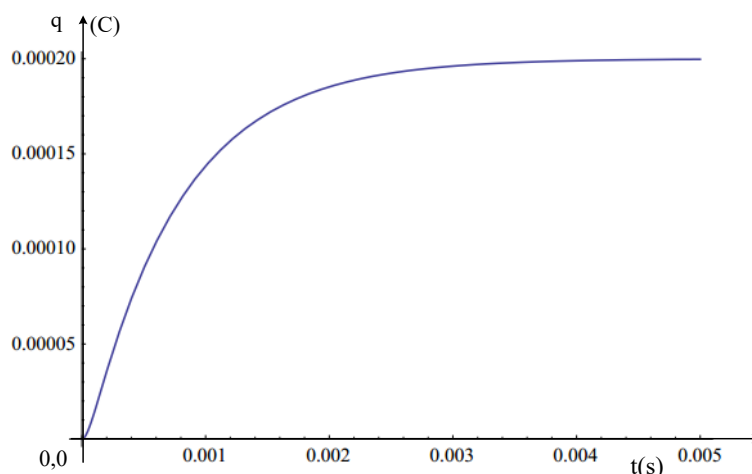
i) Οπότε τελικά αν $R=R_1=20\Omega$, η εξίσωση (9) δίνει:

$$q = 2 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-500t} \eta\mu\left(5000t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Και η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι:



- ii) Αν η αντίσταση έχει τιμή $R=R_2=40\Omega$, μεγαλύτερη τιμή από 20Ω , που αντιστοιχεί στην κρίσιμη κατάσταση, τότε δεν υπάρχει ταλάντωση στο κύκλωμα και το φορτίο του πυκνωτή φτάνει στην τιμή $q=2\cdot 10^{-4}\text{C}$ απεριοδικά, όπως στο παρακάτω διάγραμμα.



Τι ποσοστό της παρεχόμενης ενέργειας από την πηγή αποθηκεύεται τελικά στον πυκνωτή;

Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, είτε φθίνουσας ταλάντωσης είτε απεριοδικής φόρτισης του πυκνωτή, το τελικό φορτίο του πυκνωτή, είναι το ίδιο $q=Q_0=0,2\text{mC}$. Αλλά τότε τόσο φορτίο (συνολικά) περνάει και από την πηγή, παίρνοντας ενέργεια $W_{ολ}=qE$, ενώ στον πυκνωτή τελικά αποθηκεύεται ενέργεια:

$$U = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} qE = \frac{1}{2} W_{ολ}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι, όπως και στην φόρτιση με αντίσταση, το ποσοστό αποθήκευσης ενέργειας στον πυκνωτή είναι ίσο με 50%.

Συμπέρασμα:

Αν έχουμε ένα κύκλωμα με πυκνωτή και μια πηγή συνεχούς τάσης, κλείνοντας το διακόπτη ο πυκνωτής τελικά φορτίζεται με φορτίο $Q=CE$, αλλά το πώς θα συμβεί αυτό, εξαρτάται από το τι άλλο περιλαμβάνει το κύκλωμα.

- Έτσι στην περίπτωση που το κύκλωμα περιλαμβάνει **μόνο αντιστάτη**, αγνοώντας φαινόμενα αυτεπαγωγής και εκπομπής ΗΜΚ, φτάνουμε να μελετάμε την φόρτιση σαν μια εκθετική αύξηση φορτίου, όπως αποδείχτηκε στην προηγούμενη ανάρτηση (και βέβαια η φόρτιση μέσω κάποιας αντίστασης είναι και ο τρόπος που πρακτικά εφαρμόζουμε...).
- Αν το κύκλωμα περιλαμβάνει ακόμη ένα **ιδανικό πηνίο**, τότε το κύκλωμα εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση και αγνοώντας την εκπομπή ΗΜΚ, το φορτίο μεταβάλλεται αρμονικά γύρω από την τιμή $Q=CE$, αφού η παρουσία του πηνίου προκαλεί υπερφόρτωση του πυκνωτή, λόγω αυτεπαγωγής. Αλλά τότε στην πραγματικότητα δεν φορτίζεται με κάποιο σταθερό φορτίο ο πυκνωτής.
- Αν τώρα έχουμε και αντίσταση στο κύκλωμα, αν μεν είναι αυτή έχει μικρή τιμή, η κατάσταση δείχνει να παίζει το σημαντικό ρόλο το πηνίο, απλά η ταλάντωση είναι φθίνουσα, αποκτώντας τελικά ο

πυκνωτής φορτίο $Q=CE$, αν όμως έχουμε μεγάλη αντίσταση, τότε το πηνίο δεν παίζει κάποιο ρόλο (σε τελευταία ανάλυση έχουμε πολύ μικρές μεταβολές της έντασης του ρεύματος και αμελητέα φαινόμενα αυτεπαγωγής, οπότε η αντίσταση παίζει τον κυρίαρχο ρόλο και η κατάσταση μοιάζει με την περίπτωση του κυκλώματος RC.

Αν τώρα σκεφτούμε ότι σε κάθε κύκλωμα έχουμε **πάντα** αντίσταση (έστω οι αγωγοί σύνδεσης), αλλά και **πάντα** κάποια αυτεπαγωγή (του ίδιου του κυκλώματος), καταλαβαίνουμε ότι λίγο-πολύ πάντα έχουμε μια φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση...

dmargaris@gmail.com