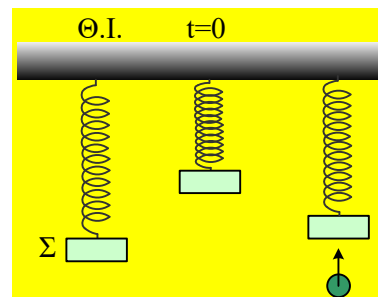


Μια Κρούση και δύο Ταλαντώσεις

Ένα σώμα Σ μάζας $M=1\text{kg}$ ηρεμεί στο κάτω άκρο ενός ιδανικού κατακόρυφου ελατηρίου, το οποίο έχει επιμηκύνει κατά $0,1\text{m}$, όπως στο πρώτο σχήμα. Μετακινούμε το σώμα κατακόρυφα προς τα πάνω, μέχρι να προκαλέσουμε συσπείρωση (από το φυσικό μήκος του) του ελατηρίου κατά $0,3\text{m}$ και τη στιγμή $t=0$, το αφήνουμε να εκτελέσει αατ με $D=k$.



Θεωρούμε την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική και την επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$:

- Να υπολογισθεί η αρχική επιτάχυνση του σώματος Σ , μόλις αφεθεί να ταλαντωθεί.
- Να βρεθούν οι εξισώσεις της απομάκρυνσης $y=y(t)$ και της ταχύτητας $v=v(t)$ του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.
- Πόση είναι η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου και ποια χρονική στιγμή t_1 η επιμήκυνση γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά;
- Τη χρονική στιγμή $t_2 = \left(13\pi/60\right)\text{s}$ το σώμα Σ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με μια σφαίρα μάζας $m=0,4\text{kg}$ η οποία κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και η οποία ελάχιστα πριν την κρούση έχει ταχύτητα $v_2=1,5\text{m/s}$.
 - Να βρεθεί η εξίσωση $y'=y'(t)$ για την απομάκρυνση του σώματος Σ από την θέση ισορροπίας του για την νέα ταλάντωση που θα ακολουθήσει, σε συνάρτηση με το χρόνο.
 - Ποια η μεταβολή της ορμής της σφαίρας, η οποία οφείλεται στην κρούση.

Απάντηση:

- Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στο σώμα Σ , στην θέση ισορροπίας του, όπου το ελατήριο έχει επιμήκυνση $d=0,1\text{m}$, τότε:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow F_{ελ} - w = 0 \rightarrow kd = Mg \rightarrow$$

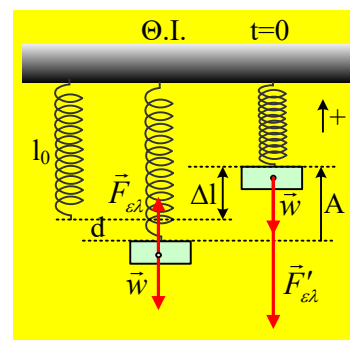
$$k = \frac{Mg}{d} = \frac{1 \cdot 10}{0,1} \text{ N/m} = 100 \text{ N/m}$$

Αλλά τότε μόλις αφεθεί να ταλαντωθεί αποκτά επιτάχυνση:

$$\Sigma \vec{F} = M\alpha \rightarrow F'_{ελ} + w = M\alpha \rightarrow \alpha = \frac{-k \cdot \Delta l - Mg}{M} \rightarrow$$

$$\alpha = \frac{-k \cdot \Delta l}{M} - g = -\frac{100 \cdot 0,3}{1} \text{ m/s}^2 - 10 \text{ m/s}^2 = -40 \text{ m/s}^2$$

Εξάλλου το αρνητικό πρόσημο της επιτάχυνσης αυτής, προφανώς δεν παραπέμπει σε καμία «επιβραδυνόμενη»!!! κίνηση, απλά μας λέει ότι η επιτάχυνση έχει φορά προς τα κάτω, αφού ορίσαμε την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική.



Εναλλακτικά:

Η επιτάχυνση στην αατ, συνδέεται με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας με τη σχέση:

$$\alpha = -\omega^2 x \rightarrow a_0 = -\frac{k}{M} A = -\frac{100}{1} 0,4 \text{ m/s}^2 = -40 \text{ m/s}^2$$

Αφού η ταλάντωση ξεκινά από θέση πλάτους, όπου $A=d+\Delta l=0,1\text{m}+0,3\text{m}=0,4\text{m}$.

ii) Η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης του σώματος είναι ίση:

$$D = k = M\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{100}{1}} \text{ rad/s} = 10 \text{ rad/s}$$

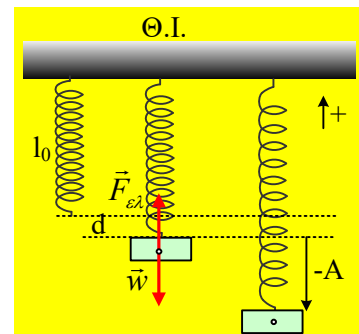
Ενώ η ταλάντωση με πλάτος $A=0,4\text{m}$ ξεκινά από την θέση $y=+A$, συνεπώς η αρχική φάση της απομάκρυνσης είναι $\varphi = \pi/2 \text{ rad}$, με αποτέλεσμα η εξίσωση της απομάκρυνσης να γίνεται:

$$y = A\eta\mu(\omega t + \varphi) = 0,4\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)} \quad (1)$$

Ενώ η αντίστοιχη εξίσωση για την ταχύτητα:

$$v = A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi) = 4\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)} \quad (2)$$

iii) Στη θέση ισορροπίας το ελατήριο έχει επιμήκυνση $d=0,1\text{m}$, ενώ μόλις το σώμα φτάσει στην κατώτερη θέση, θα βρίσκεται σε απομάκρυνση $y=-0,4\text{m}$, πράγμα που σημαίνει ότι θα έχει επιμηκυνθεί επιπλέον κατά $0,4\text{m}$, συνεπώς η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου θα είναι $\Delta l_{\max}=0,5\text{m}$. Με δεδομένο ότι το σώμα ξεκινά από την μέγιστη θετική απομάκρυνση και φτάνει στην ακραία αρνητική απομάκρυνση, θα χρειαστεί χρόνο ίσο με το μισό της περιόδου:



$$t_1 = \frac{1}{2}T = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{10} \text{ s} = 0,314 \text{ s}$$

iv) Ελάχιστα πριν την κρούση το σώμα Σ έχει ταχύτητα:

$$v = 4\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{t_1} v_1 = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(10 \cdot \frac{13\pi}{60} + \frac{\pi}{2}\right) = -4 \cdot \eta\mu\left(\frac{13\pi}{6}\right) \rightarrow$$

$$v_1 = -4 \cdot \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -4 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4 \cdot \frac{1}{2} \text{ m/s} = -2 \text{ m/s}$$

Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση είναι:

$$v'_1 = \frac{M-m}{M+m} v_1 + \frac{2m}{M+m} v_2 = \frac{1-0,4}{1+0,4} (-2) + \frac{2 \cdot 0,4}{1+0,4} \cdot 1,5 = 0$$

$$v'_2 = \frac{2M}{M+m}v_1 + \frac{m-M}{M+m}v_2 = \frac{2 \cdot 1}{1+0,4}(-2)m/s + \frac{0,4-1}{1+0,4} \cdot 1,5m/s = -3,5m/s$$

α) Αφού μηδενίζεται η ταχύτητα του σώματος Σ, μετά την κρούση, θα ξεκινήσει μια νέα ταλάντωση, από την νέα θέση πλάτους, η οποία είναι η απομάκρυνση τη στιγμή της κρούσης, η οποία υπολογίζεται από την εξίσωση (1), για πριν την κρούση:

$$y_l = 0,4\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{t_2} y_l = 0,4 \cdot \eta\mu\left(10 \cdot \frac{13\pi}{60} + \frac{\pi}{2}\right) = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{6}\right) \rightarrow$$

$$y_l = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}m = 0,2\sqrt{3}m$$

Αλλά η νέα ταλάντωση θα πραγματοποιείται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με την ίδια περίοδο και ξανά αρχική φάση $\pi/2$, με αποτέλεσμα η νέα εξίσωση της απομάκρυνσης να παίρνει τη μορφή:

$$y' = A' \cdot \eta\mu(\omega t' + \varphi) = 0,2\sqrt{3} \cdot \eta\mu\left(10(t - t_l) + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$y' = 0,2\sqrt{3} \cdot \eta\mu\left(10t - 10 \cdot \frac{13\pi}{60} + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$y' = 0,2\sqrt{3} \cdot \eta\mu\left(10t - \frac{5\pi}{3}\right) \quad (S.I.)$$

β) Η ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων παραμένει σταθερή κατά την κρούση, $\Delta\vec{p}_{ολ} = 0$, πράγμα που σημαίνει ότι έχουν αντίθετες μεταβολές της ορμής:

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0 \rightarrow \Delta p_2 = -\Delta p_1 = -(0 - Mv_1) = Mv_1 = 1 \cdot (-2)kgm/s = -2kgm/s$$

Βέβαια επιλέξαμε την πορεία αυτή εκμεταλλευόμενοι την μηδενική τελική ταχύτητα του σώματος Σ. Θα μπορούσαμε να κινηθούμε... ορθόδοξα, γράφοντας:

$$\Delta p_2 = p'_2 - p_2 = m(v'_2 - v_2) = 0,4[(-3,5) - 1,5]kgm/s = -2kgm/s$$

dmargaris@gmail.com