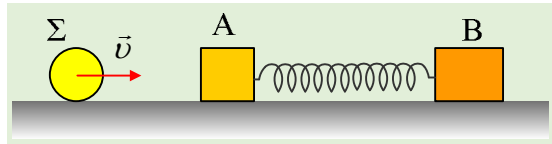


Μια κρούση και δυο «κρούσεις»...

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο σώματα Α και Β, με μάζες $m_1=1\text{kg}$ και $m_2=2\text{kg}$, δεμένα στα άκρα ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=24\text{N/m}$. Μια σφαίρα Σ με διάμετρο ίση



με το ύψος του σώματος Α και μάζα $m=0,5\text{kg}$ κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου με σταθερή ταχύτητα $v=0,9\text{m/s}$ και τη στιγμή $t=0$, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Α, όπως στο σχήμα.

- i) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του σώματος Α, αμέσως μετά την κρούση.
- ii) Για το σύστημα των σωμάτων Α και Β, να βρεθούν:
 - α) Η μέγιστη και η ελάχιστη κινητική ενέργεια του συστήματος.
 - β) Οι επιταχύνσεις των δύο σωμάτων, τη στιγμή t_1 , όπου για πρώτη φορά παρουσιάζεται η ελάχιστη κινητική ενέργεια του συστήματος.
 - γ) Η μέγιστη ταχύτητα την οποία θα αποκτήσει τη στιγμή t_2 για πρώτη φορά το σώμα Β. Πόση ταχύτητα θα έχει τη στιγμή αυτή το σώμα Α;
- iii) **Για καθηγητές μόνο:** Να βρεθούν οι παραπάνω αναφερόμενες χρονικές στιγμές t_1 και t_2 καθώς και η απόσταση μεταξύ της σφαίρας και του σώματος Α, τις στιγμές αυτές, αν το ελατήριο έχει φυσικό μήκος $0,6\text{m}$.

Απάντηση:

- i) Για τις ταχύτητες σφαίρας v' και σώματος Α v_1 , μετά την κρούση έχουμε:

$$v' = \frac{m' - m}{m' + m} v = \frac{0,5 - 1}{0,5 + 1} 0,9 \text{ m/s} = -0,3 \text{ m/s}$$

$$v_1 = \frac{2m'}{m' + m} v = \frac{2 \cdot 0,5}{0,5 + 1} 0,9 \text{ m/s} = 0,6 \text{ m/s}$$

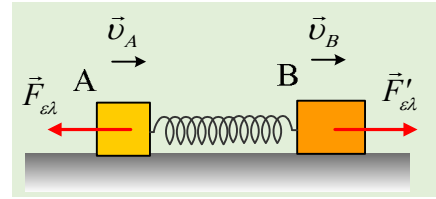
Οπότε η κινητική ενέργεια του σώματος Α, αμέσως μετά την κρούση, είναι ίση:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} 1 \cdot 0,6^2 \text{ J} = 0,18 \text{ J}$$

- ii) Η παραπάνω κινητική ενέργεια είναι και η μηχανική ενέργεια με την οποία θα κινηθεί στη συνέχεια το σύστημα των δύο σωμάτων Α και Β, μετά την κρούση, αφού αρχικά το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του (αρκεί να σκεφτούμε ότι τα σώματα Α και Β αρχικά ισορροπούν).
 - α) Αφού όλη η μηχανική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων είναι ίση με την $K_1=0,18\text{J}$, αυτή θα είναι και η μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος, αφού στη θέση αυτή $U_{\text{ελ}}=0$. Σε κάθε άλλη θέση που το ελατήριο δεν θα έχει το φυσικό μήκος του, κάποια ενέργεια θα εμφανίζεται ως δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

Αλλά τότε η ελάχιστη κινητική ενέργεια του συστήματος θα είναι όταν το ελατήριο θα έχει την μέγιστη δυναμική του ενέργεια, πράγμα που θα συμβεί, για πρώτη φορά, όταν το ελατήριο έχει την μέγιστη συσπείρωσή του. Πότε θα συμβεί αυτό;

Καθώς το σώμα Α αποκτά ταχύτητα προς τα δεξιά, συμπιέζει το ελατήριο από το οποίο δέχεται μια δύναμη $\vec{F}_{ελ}$ όπως στο σχήμα, η οποία το επιβραδύνει και η ταχύτητά του μειώνεται. Αντίθετα το σώμα Β δέχεται από το ελατήριο δύναμη προς τα δεξιά $\vec{F}'_{ελ}$ η οποία και το επιταχύνει.



Για όσο χρόνο η ταχύτητα του σώματος Α, είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του Β, τα δυο σώματα πλησιάζουν και το μήκος του ελατηρίου μειώνεται. Συνεπώς το ελατήριο έχει το ελάχιστο μήκος και άρα την μέγιστη συσπείρωση τη στιγμή που τα δυο σώματα έχουν ίσες ταχύτητες. Μέγιστη συσπείρωση όμως του ελατηρίου σημαίνει και μέγιστη δυναμική ενέργεια. Εφαρμόζοντας την διατήρηση της ενέργειας για το σύστημα, παίρνουμε:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{κ} + U_{κ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_{κ}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{κ}^2 + \frac{1}{2} k (\Delta l)^2 \quad (1)$$

Η τελευταία εξίσωση μας λέει ότι η ελάχιστη κινητική ενέργεια του συστήματος είναι τη στιγμή της μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου.

Εφαρμόζοντας τώρα την ΑΔΟ για το σύστημα για τις στιγμές αμέσως μετά την κρούση και τη στιγμή t_1 θα έχουμε:

$$\vec{P}_{αρχ} = \vec{P}_{t_1} \rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_{κ} \rightarrow$$

$$v_{κ} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{1 \cdot 0,6}{1 + 2} \text{ m/s} = 0,2 \text{ m/s}$$

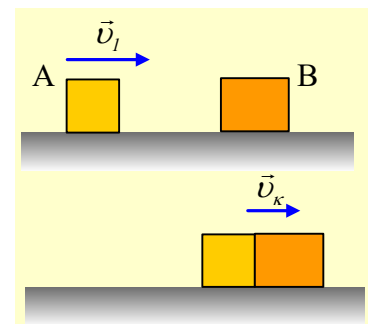
Με βάση αυτά, η ελάχιστη κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων Α και Β είναι ίση:

$$K_{min} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{κ}^2 = \frac{1}{2} (1 + 2) \cdot 0,2^2 \text{ J} = 0,06 \text{ J}$$

Παρατήρηση 1^η:

Από 0- t_1 η κατάσταση είναι ακριβώς η ίδια με μια πλαστική κρούση μεταξύ των σωμάτων Α και Β. Σε μια τέτοια (άμεση) πλαστική κρούση, το συσσωμάτωμα θα αποκτούσε κοινή ταχύτητα $v_{κ}=0,2\text{m/s}$, ενώ η απώλεια κινητικής ενέργειας θα ήταν:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - K_{min} = \frac{1}{2} 1 \cdot 0,6^2 \text{ J} - 0,06 \text{ J} = 0,12 \text{ J}$$



Η ενέργεια αυτή, συνήθως λέμε ότι μετατρέπεται σε θερμότητα, ενώ η αλήθεια είναι ότι το μεγαλύτερο μέρος της αποθηκεύεται στο σύστημα λόγω μόνιμης παραμόρφωσης των

σωμάτων. Φανταστείτε να είχαμε ένα μηχανισμό που να «κλείδωνε» το μήκος του παραπάνω ελατηρίου, τη στιγμή t_1 . Δεν θα είχαμε μια «τέλεια» πλαστική κρούση;

β) Από την εξίσωση (1) λύνοντας ως προς την μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - K_{\min} \rightarrow \Delta l_{\max} = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 - 2K_{\min}}{k}} \rightarrow$$

$$\Delta l_{\max} = \sqrt{\frac{1 \cdot 0,6^2 - 2 \cdot 0,06}{24}} m = 0,1 m$$

Αλλά τότε για τις επιταχύνσεις των σωμάτων με θετική φορά προς τα δεξιά, έχουμε:

$$\Sigma F = m_1 a_1 \rightarrow -k(\Delta l) = m_1 a_1 \rightarrow a_1 = -\frac{k(\Delta l)}{m_1} = -\frac{24 \cdot 0,1}{1} \frac{m}{s^2} = -2,4 \frac{m}{s^2}$$

$$\Sigma F_2 = m_2 a_2 \rightarrow k(\Delta l) = m_2 a_2 \rightarrow a_2 = \frac{k(\Delta l)}{m_2} = \frac{24 \cdot 0,1}{2} \frac{m}{s^2} = 1,2 \frac{m}{s^2}$$

γ) Με βάση τις επιταχύνσεις που βρήκαμε παραπάνω, βλέπουμε ότι το σώμα Β συνεχίζει να επιταχύνεται προς τα δεξιά, τη στιγμή t_1 και αυτό θα συνεχίζεται για όσο χρόνο το ελατήριο παρουσιάζει κάποια συσπείρωση. Αντίθετα αν αφού αποκτήσει το φυσικό του μήκος, στη συνέχεια επιμηκυνθεί, το σώμα Β θα αρχίζει να επιβραδύνεται. Συνεπώς την μέγιστη ταχύτητά του θα αποκτήσει για πρώτη φορά, τη στιγμή t_2 που το ελατήριο θα αποκτήσει ξανά το φυσικό του μήκος.

Εφαρμόζουμε για το σύστημα των σωμάτων Α και Β την ΑΔΟ και την ΑΔΜΕ για τις στιγμές, αμέσως μετά την κρούση και τη στιγμή t_2 που το ελατήριο έχει ξανά το φυσικό μήκος του.

$$\vec{P}_{\alpha\rho\chi} = \vec{P}_{t_2} \rightarrow m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (2)$$

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{t_2} + U_{t_2} \rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 + 0 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \quad (3)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (2) και (3) σας θυμίζει κάτι;

Το σύστημα των εξισώσεων αυτών, είναι το σύστημα των εξισώσεων σε μια κεντρική ελαστική κρούση μεταξύ δύο σωμάτων όπου το Β είναι ακίνητο! Αλλά τότε για τις ταχύτητες των δύο σωμάτων, τη στιγμή t_2 θα έχουμε:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{1 - 2}{1 + 2} 0,6 \frac{m}{s} = -0,2 \frac{m}{s} \quad \text{και}$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 \cdot 1}{1 + 2} 0,6 \frac{m}{s} = 0,4 \frac{m}{s}$$

Παρατήρηση 2^η:

Νομίζω ότι η ομοιότητα με την ελαστική κεντρική κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων Α και Β, δεν χρειάζεται

παραπέρα επισήμανση...

iii) Και η απάντηση στο ερώτημα αυτό; Ας μείνει για μια νέα ανάρτηση που να απευθύνεται σε καθηγητές...

dmargaris@gmail.com