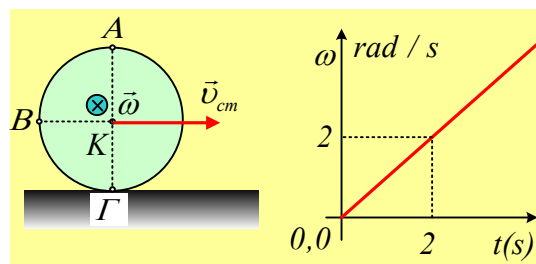


Μια σύνθετη κίνηση δίσκου

Ένας δίσκος ακτίνας $R=0,5\text{m}$ κινείται με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας K ίση με $v_{cm}=2\text{m/s}$, σε οριζόντιο επίπεδο, χωρίς να περιστρέφεται. Σε μια στιγμή $t_0=0$, στον δίσκο ασκείται κατάλληλη ροπή ενός ζεύγους, με αποτέλεσμα ο δίσκος να αρχίσει να στρέφεται, χωρίς να μεταβάλλεται η v_{cm} . Στο διάγραμμα δίνεται το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου σε συνάρτηση με το χρόνο, ενώ η κατεύθυνσή της είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας, με φορά προς τα μέσα, όπως στο σχήμα.

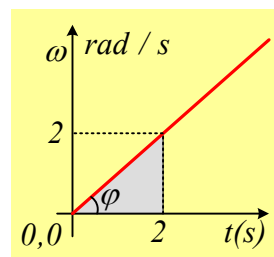


- Να υπολογισθεί η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου και η γωνία στροφής του μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1=2\text{s}$.
- Να υπολογιστούν οι ταχύτητες τριών σημείων A , B και Γ του δίσκου, όπου τα $A\Gamma$ είναι τα άκρα της κατακόρυφης διαμέτρου και το B στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας KB , τη χρονική στιγμή t_1 .
- Ποιες οι οριζόντιες επιταχύνσεις των τριών παραπάνω σημείων την ίδια στιγμή t_1 ;
- Να υπολογιστούν επίσης οι ταχύτητες των αντίστοιχων σημείων που βρίσκονται στις ίδιες θέσεις, (άκρα διαμέτρου και άκρο οριζόντιας ακτίνας) τη χρονική στιγμή $t_2=5\text{s}$.

Απάντηση:

- Από την κλίση στο διάγραμμα $\omega-t$ που μας δίνεται, υπολογίζουμε την γωνιακή επιτάχυνση, η οποία παραμένει σταθερή, αφού είναι σταθερή η κλίση της ευθείας:

$$\alpha_{\gamma\omega\gamma} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2-0}{2-0} \text{rad/s}^2 = 1 \text{rad/s}^2$$



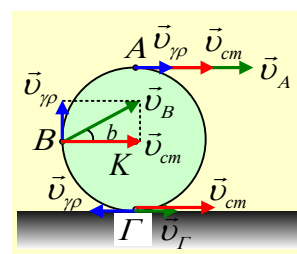
Από το ίδιο διάγραμμα υπολογίζουμε και την γωνία περιστροφής του δίσκου, αριθμητικά ίση με το εμβαδόν του γκρι τριγώνου, στο διάγραμμα:

$$\Delta\theta_1 = \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 = 2 \text{rad}$$

- Θεωρούμε την κίνηση του δίσκου σύνθετη, μια μεταφορική με ταχύτητα v_{cm} και μια περιστροφική γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο στο επίπεδο του δίσκου που περνά από το κέντρο του K . Αλλά τότε κάθε σημείο του δίσκου έχει την ταχύτητα v_{cm} και μια $v_{\gamma\rho}=\omega R$, όπως στο σχήμα. Έτσι έχουμε:

Η ταχύτητα του σημείου A είναι οριζόντια με φορά προς τα δεξιά και μέτρο:

$$v_A = v_{cm} + v_{\gamma\rho} = v_{cm} + \omega R = 2 \text{ m/s} + 2 \cdot 0,5 \text{ m/s} = 3 \text{ m/s}$$



Η ταχύτητα του σημείου επαφής με το έδαφος Γ , έχει επίσης την ίδια κατεύθυνση και μέτρο:

$$v_{\Gamma} = v_{cm} - v_{\gamma\rho} = v_{cm} - \omega R = 2 \text{ m/s} - 2 \cdot 0,5 \text{ m/s} = 1 \text{ m/s}$$

Ενώ η ταχύτητα του σημείου B έχει μέτρο:

$$v_B = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\gamma p}^2} = \sqrt{v_{cm}^2 + \omega^2 R^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} m/s = \sqrt{5} m/s$$

Ενώ η διεύθυνσή της σχηματίζει με την v_{cm} γωνία b , όπου:

$$\varepsilon \phi b = \frac{v_{\gamma p}}{v_{cm}} = \frac{\omega R}{v_{cm}} = \frac{1}{2}$$

iii) Η ταχύτητα λόγω μεταφορικής κίνησης παραμένει σταθερή, οπότε δεν έχουμε επιτάχυνση κέντρου μάζας.

Για την περιστροφική κίνηση:

- κάθε σημείο έχει μια επιτόχια επιτάχυνση, υπεύθυνη για την αλλαγή του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας, το μέτρο της οποίας συνδέεται με το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης με τη σχέση:

$$a_{cp} = a_{\gamma \omega v} R = 1 \cdot 0,5 m/s^2 = 0,5 m/s^2$$

Ενώ η κατεύθυνσή της είναι εφαπτόμενη της κυκλικής τροχιάς, όπως στο σχήμα.

- Κάθε σημείο έχει επίσης και μια κεντρομόλο επιτάχυνση, υπεύθυνη για την αλλαγή στην διεύθυνση της γραμμικής ταχύτητας, με κατεύθυνση προς το κέντρο K της τροχιάς.

Έτσι η οριζόντια επιτάχυνση του A, έχει την ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα v_{cm} , με μέτρο $0,5 m/s^2$.

Αντίθετη κατεύθυνση και το ίδιο μέτρο έχει η οριζόντια επιτάχυνση του σημείου Γ, ενώ η οριζόντια επιτάχυνση του σημείου B είναι η κεντρομόλος, με μέτρο:

$$a_k = \omega^2 \cdot R = 2^2 \cdot 0,5 m/s^2 = 2 m/s^2$$

iv) Τη στιγμή t_2 η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου έχει μέτρο:

$$\omega_2 = \alpha_{\gamma \omega v} t_2 = 1 \cdot 5 rad/s = 5 rad/s$$

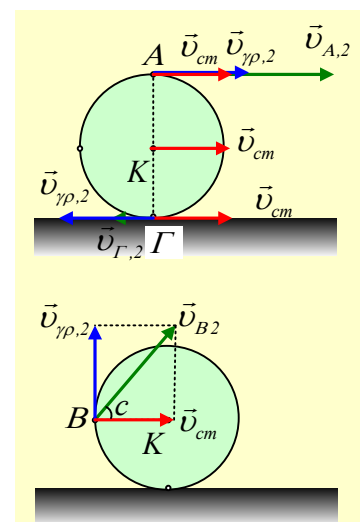
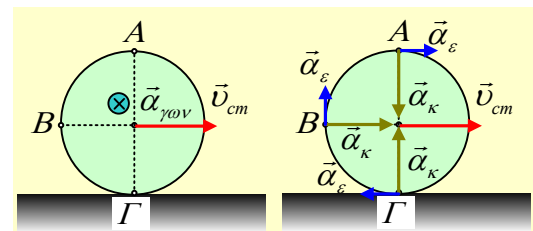
Οπότε θεωρώντας σύνθετη την κίνηση του τροχού, για την στροφική του κίνηση, η γραμμική ταχύτητα των σημείων που μας ενδιαφέρουν, τα οποία εκτελούν κυκλικές τροχιές ακτίνας R, έχουν γραμμικές ταχύτητες με μέτρο:

$$v_{\gamma p,2} = \omega_2 R = 5 \cdot 0,5 m/s = 2,5 m/s$$

Με βάση αυτά σχεδιάζουμε ξανά στο διπλανό σχήμα, τις ταχύτητες των τριών σημείων. Για τα μέτρα τους θα έχουμε:

$$v_{A,2} = v_{cm} + v_{\gamma p,2} = 2 m/s + 2,5 m/s = 4,5 m/s$$

$$v_{\Gamma,2} = v_{\gamma p,2} - v_{cm} = 2,5 m/s - 2 m/s = 0,5 m/s$$



Με κατεύθυνση προς τα αριστερά, αντίθετη από την v_{cm} . Ενώ για το Β, όπως στο 2^ο σχήμα, έχουμε:

$$v_{B,2} = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{gp,2}^2} = \sqrt{2^2 + 2,5^2} \text{ m / s} = \sqrt{10,25} \text{ m / s} = 3,2 \text{ m / s}$$

Ενώ η διεύθυνσή της σχηματίζει με την v_{cm} γωνία c , όπου:

$$\varepsilon\varphi c = \frac{v_{gp,2}}{v_{cm}} = \frac{2,5}{2} = \frac{5}{4}$$

dmargaris@gmail.com