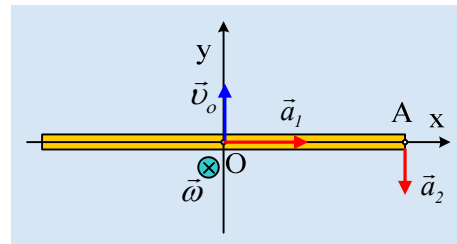


Μια σύνθετη κίνηση ράβδου

Μια ομογενής ράβδος μήκους 2m κινείται οριζόντια, σε λείο οριζόντιο επίπεδο και στο σχήμα φαίνεται η θέση της ράβδου, τη στιγμή $t_0=0$, όπου το μέσον της O περνά από την αρχή ενός οριζόντιου συστήματος ορθογωνίων αξόνων x,y , ενώ η ράβδος ταυτίζεται κατά μήκος, με τον άξονα x . Τη στιγμή αυτή το O έχει ταχύτητα $v_0=2,5\text{m/s}$ στη διεύθυνση y και επιτάχυνση a_1 στη διεύθυνση x , ενώ την ίδια στιγμή το άκρο A της ράβδου, έχει επιτάχυνση a_2 , μέτρου $a_2=(\pi/4)\text{ m/s}^2$, όπως στο σχήμα, κάθετη στην ράβδο. Ταυτόχρονα η ράβδος έχει γωνιακή ταχύτητα περιστροφής μέτρου $\omega=(\pi/4)\text{ rad/s}$, κάθετη στο επίπεδο του σχήματος με φορά προς τα μέσα.



- i) Να υπολογιστεί το μέτρο της επιτάχυνσης a_1 του μέσου O της ράβδου καθώς και η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου.

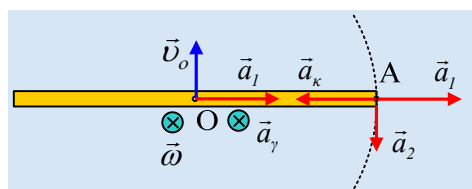
Αν η επιτάχυνση το κέντρου O , καθώς και η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου παραμένουν σταθερές, ζητούνται, για τη χρονική στιγμή $t_1=2\text{s}$:

- ii) Η θέση του μέσου O της ράβδου, καθώς το μέτρο της ταχύτητάς του.
 iii) Ποιος ο προσανατολισμός της ράβδου και ποιο το μέτρο της γωνιακής της ταχύτητας;
 iv) Να βρεθούν οι ταχύτητες v_{Ax} και v_{Ay} , καθώς και οι αντίστοιχες επιταχύνσεις στους δυο άξονες, του άκρου A της ράβδου.

Δίνεται $\pi^2=10$.

Απάντηση:

- i) Θεωρούμε την σύνθετη κίνηση της ράβδου ως επαλληλία μιας μεταφορικής κίνησης με ταχύτητα και επιτάχυνση αυτές του κέντρου μάζας O (στην πραγματικότητα θα μπορούσαμε να πάρουμε για τις ανάγκες της άσκησης σαν βάση ένα οποιοδήποτε άλλο σημείο της ράβδου...) και μιας στροφικής κίνησης γύρω από το O . Αλλά τότε το άκρο A έχει εκτός της επιτάχυνσης a_2 που μας δίνεται και την επιτάχυνση a_1 του κέντρου μάζας, λόγω μεταφορικής κίνησης και την κεντρομόλο επιτάχυνση a_k λόγω της κυκλικής του κίνησης σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας $R=\frac{1}{2}l=1\text{m}$. Αλλά αφού η συνολική του επιτάχυνση είναι η a_2 , τότε:



$$\vec{a}_x = 0 \rightarrow a_k = a_1 \rightarrow a_1 = \omega^2 R = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot 1\text{m} / \text{s}^2 = \frac{5}{8} \text{m} / \text{s}^2$$

Εξάλλου η εφαπτομενική επιτάχυνση, η επιτροχία επιτάχυνση a_2 του σημείου A , οφείλεται στην επιταχυνόμενη στροφική κίνηση της ράβδου, οπότε:

$$v_\gamma = \omega R \rightarrow \frac{dv_\gamma}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R \rightarrow a_{\epsilon\pi} = a_{\gamma\omega} R \rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_2}{R} = \frac{\pi/4}{1} \text{ rad} / \text{s}^2 = \frac{\pi}{4} \text{ rad} / \text{s}^2.$$

Με κατεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της σελίδας και φορά προς τα μέσα, ίδια με την κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας.

- ii) Για την μεταφορική κίνηση της ράβδου, ισχύει η αρχή της επαλληλίας, οπότε μπορούμε να την θεωρήσουμε ότι έχουμε δύο ανεξάρτητες κινήσεις στους άξονες, μια ευθύγραμμη ομαλή στον y και μια ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη στον άξονα x (θυμηθείτε την μελέτη της οριζόντιας βολής...). έτσι έχουμε τις εξισώσεις:

Άξονας x	Άξονας y
$v_x = \alpha_l t \quad (1)$	$v_y = v_0 \quad (3)$
$x = \frac{1}{2} \alpha_l t^2 \quad (2)$	$y = v_0 t \quad (4)$

Με αντικατάσταση $t=2\text{s}$, παίρνουμε:

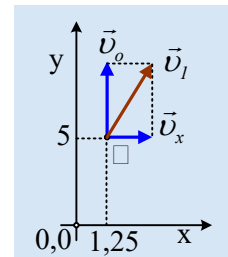
$$x = \frac{1}{2} \alpha_l t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot 2^2 \text{ m} = 1,25 \text{ m} \quad \text{και} \quad y = v_0 t = 2,5 \cdot 2 \text{ m} = 5 \text{ m}$$

Το μέσον O της ράβδου έχει φτάσει σε ένα σημείο με συντεταγμένες (x,y)= (1,25m,5m), ενώ για την ταχύτητα στην διεύθυνση x:

$$v_x = \alpha_l t = \frac{5}{8} \cdot 2 \text{ m/s} = 1,25 \text{ m/s}$$

Αλλά τότε το μέτρο της ταχύτητας v_1 του μέσου O της ράβδου είναι:

$$v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1,25^2 + 2,5^2} \text{ m/s} = 1,25\sqrt{5} \text{ m/s} = 2,8 \text{ m/s}$$



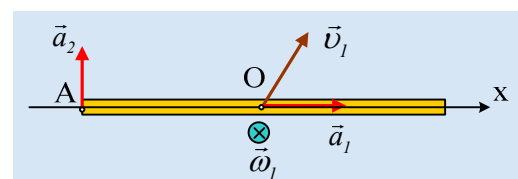
- iii) Για την στροφική κίνηση της ράβδου με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, σε αναλογία με την ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχουμε τις εξισώσεις:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_\gamma t \quad \text{και} \quad \varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_\gamma t^2 \xrightarrow{t=2\text{s}}$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cdot 2 \text{ rad/s} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad/s} \quad \text{και}$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_\gamma t^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 2 \text{ rad} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 2^2 \text{ rad} = \pi \text{ rad}$$

Συνεπώς η ράβδος έχει στραφεί κατά π (rad) οπότε έχουμε το διπλανό σχήμα, ενώ η γωνιακή ταχύτητα έχει μέτρο $\omega_1 = 3\pi/4 \text{ rad/s}$.



- iv) Το άκρο A της ράβδου, έχει την ταχύτητα του κέντρου

μάζας, στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυο συνιστώσες της, και μια γραμμική ταχύτητα, εξαιτίας της στροφικής κίνησης, με μέτρο:

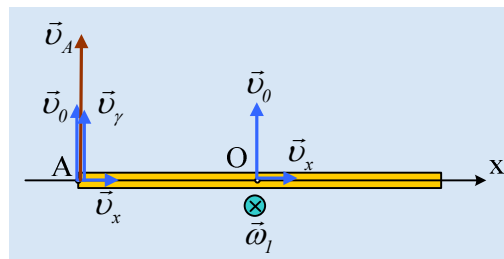
$$v_{\gamma} = \omega_l R = \frac{3\pi}{4} \cdot 1m / s = \frac{3\pi}{4} m / s \approx 2,4m / s .$$

Αλλά τότε για τις συνιστώσες ταχύτητας στους άξονες x και y θα έχουμε:

$$v_{Ax} = v_x = 1,25m \text{ και}$$

$$v_{Ay} = v_0 + v_{\gamma} = 2,5m / s + 2,4m / s = 4,9m / s$$

Όπως στο διπλανό σχήμα.



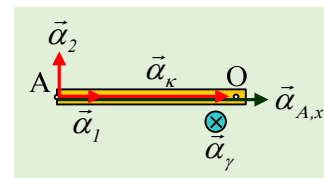
Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο για τις επιταχύνσεις, έχουμε για το άκρο A της ράβδου:

$$a_{Ax} = a_k + a_l = \omega_l^2 R + \omega^2 R \rightarrow$$

$$a_{Ax} = \frac{9\pi^2}{16} \cdot 1 m / s^2 + \frac{\pi^2}{16} \cdot 1 m / s^2 \rightarrow$$

$$a_{Ax} = \frac{10\pi^2}{16} m / s^2 = \frac{100}{16} m / s^2 = 6,25m / s^2 \text{ και}$$

$$a_{Ay} = a_{\varepsilon\pi} = \alpha_{\gamma} R = a_2 = \frac{\pi}{4} m / s^2 \approx 0,8m / s^2 .$$



dmargaris@gmail.com