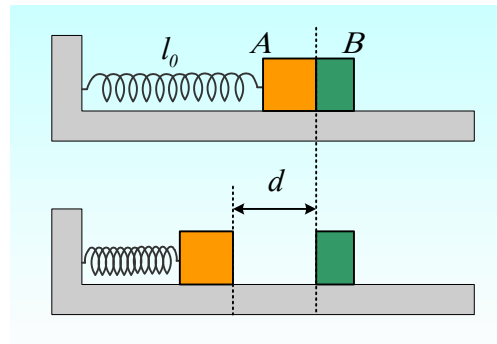


Μιλώντας με όρους συστήματος.

Δύο σώματα Α και Β με μάζας $m_1=2\text{kg}$ και $m_2=1\text{kg}$ αντίστοιχα ηρεμούν σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο παρουσιάζουν τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,2$. Το σώμα Α βρίσκεται επίσης σε επαφή (χωρίς να είναι δεμένο) με οριζόντιο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k=88\text{N/m}$, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του, όπως στο σχήμα. Μετακινούμε το Α σώμα προς τα αριστερά κατά $d=0,5\text{m}$, συμπιέζοντας το ελατήριο και το αφήνουμε να κινηθεί, οπότε μετά από λίγο, τη στιγμή $t_0=0$, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Β, όπου η κρούση είναι ακαριαία.



- Να υπολογισθεί η αρχική επιτάχυνση του σώματος Α, μόλις αφεθεί να κινηθεί.
- Να υπολογισθεί η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος Α, ελάχιστα πριν την κρούση.
- Ποια η ορμή και ποιος ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος των δύο σωμάτων:
 - αμέσως μετά την κρούση τη στιγμή t_0^+ .
 - τη χρονική στιγμή $t_1=1\text{s}$.

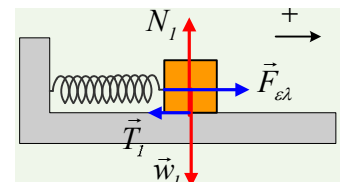
Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- Μόλις αφεθεί το Α σώμα να κινηθεί, με συμπιεσμένο το ελατήριο, θα δεχτεί τις δυνάμεις του διπλανού σχήματος, όπου $\Sigma F_y=0$ ή $N_1=w_1=m_1g$, οπότε:

$$T_l = \mu m_l g = 0,2 \cdot 2 \cdot 10\text{N} = 4\text{N}.$$

Έτσι από το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής, με θετική φορά προς τα δεξιά, παίρνουμε:



$$\Sigma \vec{F}_x = m_l \vec{a} \rightarrow F_{el} - T_l = m_l a \rightarrow a = \frac{kd - T_l}{m_l} = \frac{88 \cdot 0,5 - 4}{2} \text{m/s}^2 = 20\text{m/s}^2.$$

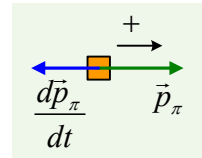
- Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα Α, από τη θέση που αφήνεται να κινηθεί, μέχρι ελάχιστα πριν την κρούση, όπου το ελατήριο οριακά αποκτά το φυσικό μήκος του:

$$K_\tau - K_\alpha = W_{w_l} + W_{N_l} + W_{F_{el}} + W_{T_l} \xrightarrow{K_\alpha = W_{w_l} = W_{N_l} = 0} \\ \frac{1}{2} m_l u^2 = \frac{1}{2} k d^2 - T_l \cdot d \rightarrow u = \sqrt{\frac{k d^2 - 2 T_l \cdot d}{m_l}} \rightarrow \\ u = \sqrt{\frac{88 \cdot 0,5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 0,5}{2}} \text{m/s} = 3\text{m/s}$$

Οπότε για την ορμή και το ρυθμό μεταβολής της έχουμε:

$$\vec{p}_\pi = m_l \vec{u} \rightarrow p_\pi = m_l u = 2 \cdot 3 \text{ kgm/s} = 6 \text{ kgm/s} \quad \text{και}$$

$$\frac{d\vec{p}_\pi}{dt} = \Sigma \vec{F} \rightarrow \frac{dp_\pi}{dt} = -T_l = -4 \text{ kgm/s}^2.$$



Διανύσματα με κατευθύνσεις όπως στο σχήμα.

iii) Τα σώματα αμέσως μετά την κρούση έχουν ταχύτητες:

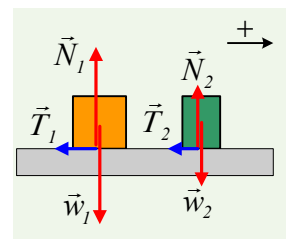
$$v_A = v'_l = \frac{m_l - m_2}{m_l + m_2} u = \frac{2 - 1}{2 + 1} 3 \text{ m/s} = 1 \text{ m/s} \quad \text{και}$$

$$v_B = v'_2 = \frac{2m_l}{m_l + m_2} u = \frac{2 \cdot 2}{2 + 1} 3 \text{ m/s} = 4 \text{ m/s}$$

Κατά συνέπεια και τα δυο σώματα θα κινηθούν προς τα δεξιά, ενώ πάνω τους θα ασκούνται οι δυνάμεις του σχήματος, αφού το σώμα Α δεν είναι δεμένο με το ελατήριο, το οποίο θα παραμείνει στο φυσικό μήκος του.

Για το Β σώμα θα έχουμε ότι:

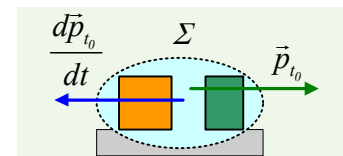
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_2 = m_2 g \rightarrow T_2 = \mu m_2 g = 0,2 \cdot 1 \cdot 10 \text{ N} = 2 \text{ N}$$



α) Αφού στην κρούση η ορμή διατηρείται, για τη στιγμή t_0^+ η ορμή του συστήματος θα είναι ίση και με την ορμή πριν την κρούση του σώματος Α (το Β ήταν ακίνητο):

$$\vec{p}_{t_0} = \vec{p}_\pi \rightarrow p_{t_0} = 6 \text{ kgm/s}$$

Ενώ ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος είναι ίσος με την συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα:



$$\frac{d\vec{p}_{t_0}}{dt} = \Sigma \vec{F}_{\varepsilon\xi} \rightarrow \frac{dp_{t_0}}{dt} = -T_l - T_2 = -(4 + 2) \text{ kgm/s}^2 = -6 \text{ kgm/s}^2.$$

β) Τα δύο σώματα επιβραδύνονται έχοντας την ίδια επιτάχυνση, αφού αυτή είναι ανεξάρτητη της μάζας:

$$\Sigma \vec{F}_x = m_l \vec{a}' \rightarrow -T = ma' \rightarrow -\mu mg = ma' \rightarrow a' = -\mu g = -2 \text{ m/s}^2.$$

Αλλά τότε η ταχύτητά τους δίνεται από τις εξισώσεις:

$$v_l = v'_l + a't \quad \text{και} \quad v_2 = v'_2 + a't$$

Θέτοντας $v_1 = v_2 = 0$, βρίσκουμε ποιες χρονικές στιγμές πρόκειται να σταματήσουν τα σώματα:

$$v_l = v'_l + a't \rightarrow 0 = v'_l + a'\tau_l \rightarrow \tau_l = -\frac{v'_l}{a'} = -\frac{1}{-2} \text{ s} = 0,5 \text{ s} \quad \text{και}$$

$$v_2 = v'_2 + a't \rightarrow 0 = v'_2 + a'\tau_2 \rightarrow \tau_2 = -\frac{v'_2}{a'} = -\frac{4}{-2} \text{ s} = 2 \text{ s}$$

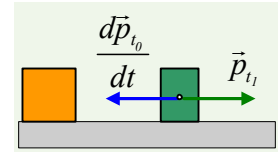
Με βάση τις τιμές αυτές βλέπουμε ότι τη στιγμή $t_1 = 1 \text{ s}$, το σώμα Α έχει ήδη σταματήσει, ενώ το σώμα Β έχει ταχύτητα:

$$v_2 = v'_2 + a't_1 = (4 - 2 \cdot 1) \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}.$$

Συνεπώς για το σύστημα των δύο σωμάτων, θα έχουμε:

$$\vec{p}_{t_1} = \vec{p}_B \rightarrow p_{t_1} = m_2 v_2 = 1 \cdot 2 \text{ kgm/s} = 2 \text{ kgm/s} \text{ και}$$

$$\frac{d\vec{p}_{t_1}}{dt} = \Sigma \vec{F}_{\varepsilon\xi} \rightarrow \frac{dp_{t_1}}{dt} = -T_2 = -2 \text{ kgm/s}^2.$$



dmargaris@gmail.com