Πτώση με αντίσταση αέρα ανάλογης της ταχύτητας.

Ένα κιβώτιο μάζας 20kg αφήνεται να πέσει από ένα ελικόπτερο, το οποίο έχει μηδενική ταχύτητα, σε ύψος h=500m από το έδαφος. Αν κατά την κίνησή του το κιβώτιο δέχεται δύναμη αντίστασης από τον αέρα της μορφής F=-bυ= -10υ (μονάδες στο S.I.), ζητούνται:

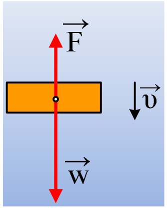
i) Η οριακή ταχύτητα την οποία θα αποκτήσει το κιβώτιο.

ii) Σε πόσο χρόνο το κιβώτιο θα φτάσει στο έδαφος;

Δίνεται $g=10m/s^2$

Απάντηση:

i) Έστω κάποια στιγμή που η ταχύτητα του κιβωτίου είναι υ, τότε οι δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Εφαρμόζοντας τον 2^o νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε: ΣF=mα ή



$$mg - b\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dt} \rightarrow m\frac{d\upsilon}{dt} + b\upsilon - mg = 0 \quad (3\alpha)$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης (με βάση τα προηγούμενα) είναι:

$$\upsilon = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) \rightarrow \upsilon = 20\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right) \quad \text{(S.I.)}$$

Συνεπώς η ταχύτητα του κιβωτίου αυξάνεται εκθετικά με το χρόνο με σταθερά χρόνου $\tau = \frac{m}{b} = 2s$,

οπότε η ταχύτητα θα φτάσει οριακά στην τιμή $\upsilon_{o\rho} = \frac{mg}{b} = 20m/s$ θεωρητικά σε άπειρο χρόνο,

πρακτικά όμως, θεωρούμε ότι η ταχύτητα αυτή σταθεροποιείται σε χρόνο $t_1 = 5\tau = 10s$.

ii) Ολοκληρώνοντας την σχέση (3^α) για την διάρκεια της επιταχυνόμενης κίνησης, παίρνουμε:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} + b\upsilon - mg = 0 \rightarrow \int_0^{5\tau} m d\upsilon + \int_0^{5\tau} b\upsilon dt - \int_0^{5\tau} mg dt = 0$$

$$m\upsilon_{o\rho} + b \cdot h_1 - mgt_1 = 0 \text{ ή } h_1 = \frac{m(gt_1 - \upsilon_{o\rho})}{b} \rightarrow h_1 = 160m$$

Στη συνέχεια το κιβώτιο θα κινηθεί με σταθερή ταχύτητα και θα φτάσει στο έδαφος, αφού διανύσει απόσταση $h-h_1=340m$ σε χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{h - h_1}{\upsilon_{o\rho}} = 17s$

Συνεπώς ο συνολικός χρόνος κίνησής του είναι $t_1+\Delta t=27s$.

dmargaris@sch.gr