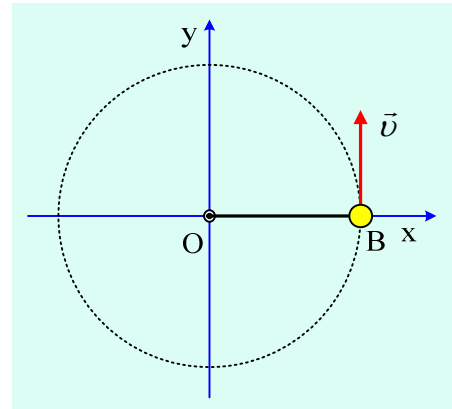


Σαν σκηνές από ταινία προσεχώς...

Ένα μικρό σώμα Σ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο μη εκτατού νήματος μήκους $l=R=(8/\pi)=2,5\text{m}$, με ταχύτητα μέτρου $v=2\text{m/s}$ και τη στιγμή $t=0$ περνά από την θέση B, όπως το σχήμα (σε κάτοψη). Το κέντρο του κύκλου O είναι και αρχή ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων x,y όπου ο άξονας x περνά και από το σημείο B.



- Να υπολογισθεί η γωνιακή ταχύτητα περιφοράς του σώματος, καθώς και η γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα, σε συνάρτηση με το χρόνο. Να γίνει η γραφική παράσταση $\varphi=f(t)$, μέχρι τη στιγμή $t_1=12\text{s}$. Σε ποια θέση βρίσκεται τη στιγμή αυτή το σώμα;
- Να βρείτε την εξίσωση που μας δίνει την τεταγμένη y , της θέσης του σώματος Σ , σε συνάρτηση με το χρόνο και να παρασταθεί γραφικά, μέχρι τη στιγμή t_1 .
- Ποια η αντίστοιχη εξίσωση για την συνιστώσα της ταχύτητας στην διεύθυνση του άξονα y ; Να γίνει επίσης η ανάλογη γραφική παράσταση $v_y=f(t)$, μέχρι τη στιγμή t_1 .
- Αφού υπολογίσετε την κεντρομόλο επιτάχυνση που ασκείται στο σώμα, να την αναλύσετε στους άξονες x και y και να βρείτε την συνιστώσα της στην διεύθυνση y .

Απάντηση:

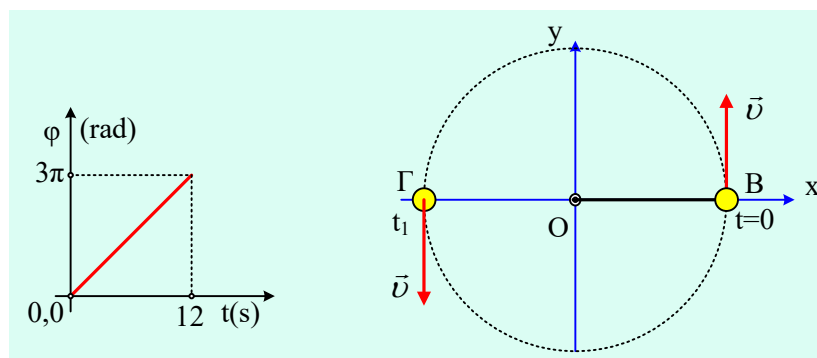
- Τα μέτρα γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας συνδέονται με την εξίσωση:

$$v = \omega R \rightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{2}{8/\pi} \text{ rad/s} = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}$$

Αλλά τότε η γωνία που διαγράφει το σώμα, δίνεται από την εξίσωση:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \rightarrow \varphi = \omega t = \frac{\pi}{4} t \quad (S.I.)$$

Οπότε η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.



Τη στιγμή $t_1=12\text{s}$ το νήμα έχει διαγράψει γωνία $\varphi=3\pi = 2\pi+\pi$, έχει ολοκληρώσει δηλαδή 1,5 περιφορά

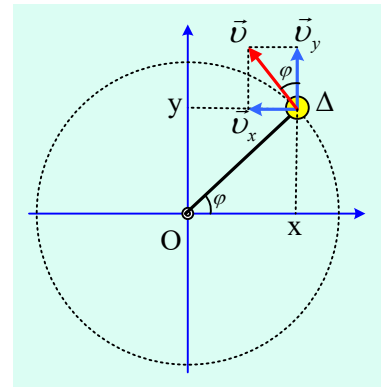
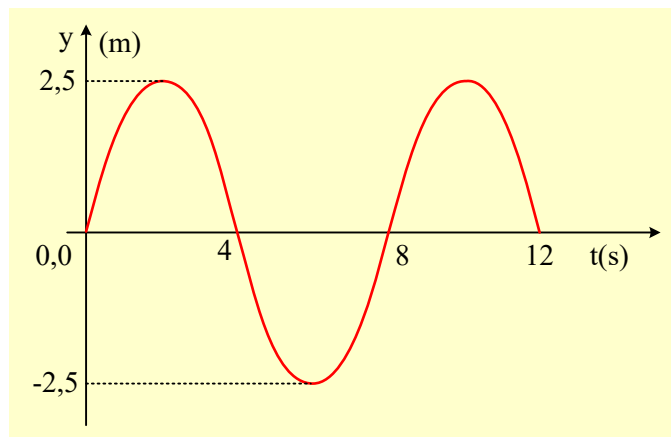
γύρω από το O, και περνά από το σημείο Γ, αντιδιαμετρικό του Β, όπως στο 2^ο από τα παραπάνω σχήματα.

- ii) Έστω σε μια στιγμή t το σώμα περνά από το σημείο Δ, έχοντας διαγράψει γωνία φ , όπως στο σχήμα. Οι συντεταγμένες της θέσης αυτής, στους ορθογώνιους άξονες είναι (x,y) . Για την τεταγμένη y έχουμε:

$$\eta\mu\varphi = \frac{y}{R} \rightarrow y = R\eta\mu\varphi = 2,5 \cdot \eta\mu\omega t = 2,5 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}t\right) \quad (S.I.)$$

Βλέπουμε ότι η y η προβολή της θέσης του σώματος στην διεύθυνση y μεταβάλλεται ημιτονοειδώς με το χρόνο, συνεπώς αφού συμπληρώσουμε τον πίνακα τιμών, όπως παρακάτω σχεδιάζουμε δίπλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=f(t)$.

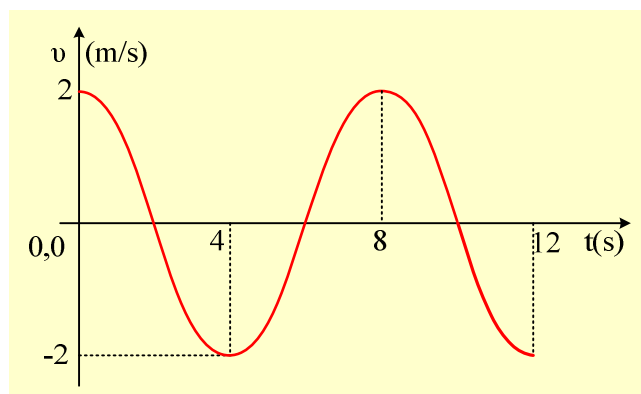
t(s)	y(m)
0	0,0
2	2,5
4	0,0
6	-2,5
8	0,0
10	2,5
12	0,0



- iii) Αναλύουμε την ταχύτητα του σώματος στην τυχαία θέση, όπως στο παραπάνω σχήμα. Έτσι για την ταχύτητα στην διεύθυνση y , η ταχύτητα της προβολής του σώματος στην διεύθυνση του άξονα y , παρατηρώντας ότι η γωνία μεταξύ v_y και v είναι ίση με φ (γωνίες με κάθετες πλευρές), έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{v_y}{v} \rightarrow v_y = v \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}t\right) \quad (S.I.)$$

Η παραπάνω σχέση μας δείχνει ότι η ταχύτητα v_y μεταβάλλεται συνημιτονοειδώς με το χρόνο, οπότε δουλεύοντας όπως στο προηγούμενο ερώτημα, παίρνουμε το διπλανό διάγραμμα.



- iv) Το σώμα έχει κεντρομόλο επιτάχυνση μέτρου:

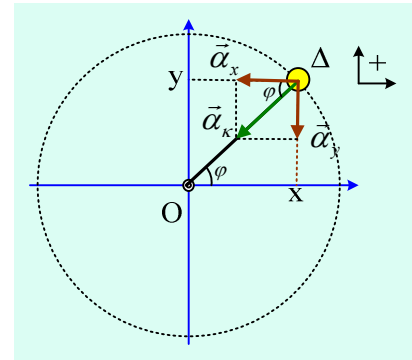
$$\alpha_\kappa = \frac{v^2}{R} = \frac{2^2}{2,5} m/s^2 = 1,6 m/s^2$$

Με κατεύθυνση προς το κέντρο O της τροχιάς. Αναλύουμε την επιτάχυνση αυτή στη διεύθυνση των δύο

αξόνων, όπως στο διπλανό σχήμα, οπότε υπολογίζουμε την επιτάχυνση στη διεύθυνση y, την οποία ζητάμε:

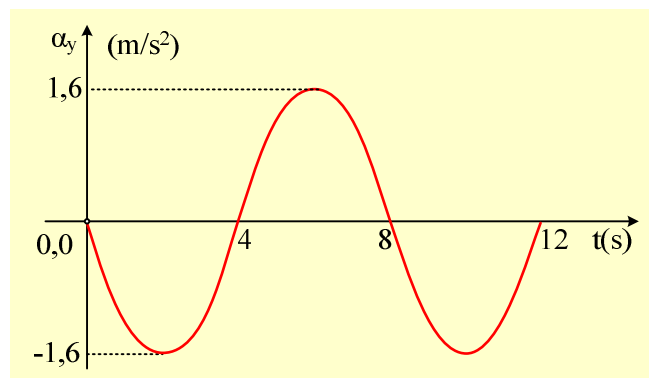
$$\eta\mu\varphi = \frac{|a_y|}{a_\kappa} \rightarrow |a_y| = a_\kappa \cdot \eta\mu\varphi \rightarrow$$

$$a_y = -1,6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}t\right) \quad (S.I.)$$



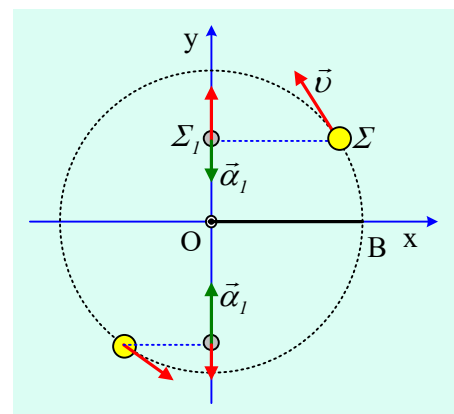
Όπου το αρνητικό πρόσημο της παραπάνω αλγεβρικής τιμής μας τονίζει ότι η επιτάχυνση έχει φορά προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα y. Ας συμπληρώσουμε και πάλι!!! πίνακα τιμών για να κάνουμε πιο εύκολη τη χάραξη της γραφικής παράστασης, όπως στο παρακάτω σχήμα.

t(s)	a _y (m/s ²)
0	0,0
2	-1,6
4	0,0
6	1,6
8	0,0
10	-1,6
12	0,0



Σχόλιο για μαθητές.

Αν συγκρίνουμε τα διαγράμματα $y(t)$ και $a_y(t)$ θα παρατηρήσουμε ότι έχουν αντίθετα πρόσημα (όταν $y > 0$, τότε $a_y < 0$ και αντίστροφα). Η επιτάχυνση δηλαδή κατευθύνεται προς το σημείο O, την αρχή των αξόνων. Πράγμα που σημαίνει ότι αν έχουμε ένα σώμα Σ_1 , όπου κάθε στιγμή βρίσκεται στην προβολή του σώματος Σ που κινείται κυκλικά, στον άξονα y, τότε το σώμα Σ_1 εκτελεί μια αρμονική κίνηση (παρατηρείστε τις συναρτήσεις $\eta\mu\omega t$ και $\sigma\upsilon\nu\omega t$ παραπάνω), την οποία θα διδαχτείτε στην Γ' Λυκείου. Η κίνηση αυτή είναι μια ευθύγραμμη περιοδική κίνηση που ονομάζεται **αρμονική ταλάντωση**.



dmargaris@gmail.com