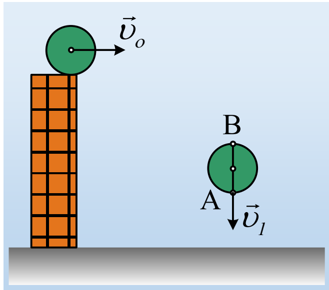
Μια πλάγια βολή δίσκου.

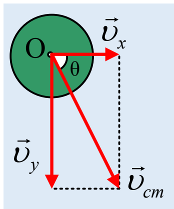


Από ορισμένο ύψος, εκτοξεύεται για t=0, οριζόντια ένας ομογενής δίσκος με αρχική ταχύτητα υ_0=2m/s και ορισμένη γωνιακή ταχύτητα ω, η οποία παραμένει σταθερή στη διάρκεια της πτώσης. Το επίπεδο του δίσκου ταυτίζεται με το επίπεδο της σελίδας του διπλανού σχήματος. Τη στιγμή t_1=0,4s, το κάτω άκρο Α μιας κατακόρυφης διαμέτρου ΑΒ, έχει μόνο κατακόρυφη ταχύτητα υ_1. Για τη στιγμή t_1 ζητούνται:

i) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κέντρου (και κέντρου μάζας) του δίσκου Ο.
ii) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου, καθώς και η επιτάχυνση του σημείου Α, τη στιγμή t_1.
iii) Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου Β, του ανώτερου σημείου της κατακόρυφης διαμέτρου.

Δίνεται g=10m/s^2, ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Απάντηση:



i) Από τον ορισμό του κέντρου μάζας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το κέντρο Ο του δίσκου, δέχεται τη μοναδική δύναμη που ασκείται στο δίσκο, το βάρος w, στο οποίο έχουμε συγκεντρωμένη τη μάζα του δίσκου, οπότε θεωρούμε ότι έχουμε ένα υλικό σημείο, το οποίο εκτελεί την οριζόντια βολή. Αλλά τότε η κίνηση θεωρείται σύνθεση μιας οριζόντιας κίνησης, ευθύγραμμης ομαλής με σταθερή ταχύτητα υ_x=υ_o και μιας κατακόρυφης κίνησης ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης (ελεύθερης πτώσης).

Συνεπώς τη στιγμή t_1 το Ο έχει κατακόρυφη ταχύτητα:

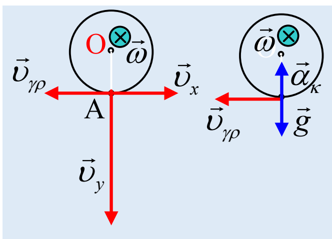
$$\upsilon_y = gt = 10 \cdot 0{,}4m/s = 4m/s$$

Τότε με βάση και το σχήμα, έχουμε για το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας Ο:

$$\upsilon_{cm} = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{2^2 + 4^2}\,m/s = \sqrt{20}m/s = 2\sqrt{5}m/s$$

Ενώ η διεύθυνσή της σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ, όπου:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_o} = \frac{4}{2} = 2$$



ii) Επιστρέφουμε τώρα στο «στερεό» δίσκος! Θεωρούμε σύνθετη την κίνησή του, μια μεταφορική με ταχύτητα ίση με την υ_{cm} και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο Ο του δίσκου. Αλλά τότε το σημείο Α, έχει τις ταχύτητες υ_x και υ_y του κέντρου Ο, λόγω μεταφορικής κίνησης και μια γραμμική ταχύτητα $\upsilon_{\gamma\rho}$=ωR, λόγω τη στροφικής κίνησης. Με δεδομένο ότι το Α έχει μόνο κατακόρυφη ταχύτητα, συμπεραίνουμε ότι ο δίσκος στρέφεται δεξιόστροφα και η γραμμική ταχύτητα είναι αντίθετη της υ_o, όπως στο σχήμα. Συνεπώς για την οριζόντια διεύθυνση:

$$\upsilon_{A,x} = 0 \rightarrow \upsilon_x = \upsilon_{\gamma\rho} \rightarrow \upsilon_0 = \omega R \rightarrow \omega = \frac{\upsilon_0}{R} = \frac{2m/s}{0,4m} = 5\,{}^{1}\!/_{s} = 5rad/s$$

Στο 2ο σχήμα παραπάνω έχουν σημειωθεί οι επιταχύνσεις του σημείου Α. Μια λόγω της μεταφορικής κίνησης (ίση με g) και την κεντρομόλο επιτάχυνση α_κ, εξαιτίας της κυκλικής κίνησης του Α γύρω από το Ο. Για την κεντρομόλο έχουμε:

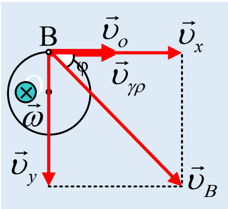
$$\alpha_\kappa = \omega^2 R = 5^2 \cdot 0,4m/s^2 = 10m/s^2 = g$$

Άρα η συνολική επιτάχυνση του σημείου Α είναι μηδενική:

$$\alpha_A = \alpha_\kappa - g = 0$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η παραπάνω επιτάχυνση του εκάστοτε σημείου στο κάτω άκρο μιας κατακόρυφης διαμέτρου είναι ανεξάρτητη του χρόνου, άρα θα είναι μηδενική σε όλη τη διάρκεια της πτώσης.

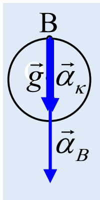
iii) Με την ίδια όπως παραπάνω λογική σχεδιάζουμε τις ταχύτητες του σημείου Β, όπου τώρα η υ_o και η γραμμική ταχύτητα έχουν ίσα μέτρα αλλά και την ίδια κατεύθυνση, οπότε για την ταχύτητα του σημείου Β θα έχουμε:



$$\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\left(\upsilon_o + \upsilon_{\gamma\rho}\right)^2 + \upsilon_y^2} \rightarrow$$

$$\upsilon_B = \sqrt{(2+2)^2 + 4^2}\,m/s = \sqrt{2 \cdot 16}\,m/s = 4\sqrt{2}\,m/s$$

Ενώ για την κατεύθυνσή της φ=45°, αφού το παραλληλόγραμμο είναι τελικά τετράγωνο.



Όσον αφορά την επιτάχυνση, με βάση το διπλανό σχήμα, αφού το μέτρο της κεντρομόλου είναι το ίδιο με πριν ($\alpha_\kappa = \omega^2 R$), οι δύο επιταχύνσεις έχουν ίσα μέτρα και η ολική επιτάχυνση είναι κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω και μέτρο:

$$\alpha_B = \alpha_\kappa + g = 2g = 20m/s^2.$$

dmargaris@gmail.com