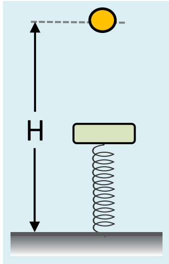
Μια κρούση και μια ταλάντωση.



Μια πλάκα μάζας m ηρεμεί στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς k=200N/m, το άλλο άκρο του οποίου στηρίζεται στο έδαφος. Μια σφαίρα μάζας m_1=1,2kg αφήνεται να πέσει ελεύθερα από ύψος H=95cm, από το έδαφος και μόλις αποκτήσει ταχύτητα $υ_1$=3m/s, συγκρούεται κεντρικά με την πλάκα. Μετά την κρούση η σφαίρα κινείται προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα μέτρου $|υ_1'|$=1/3 m/s και απομακρύνεται, ενώ ο δίσκος εκτελεί μια ΑΑΤ, με D=k, όπου το ελάχιστο ύψος από το έδαφος , στο οποίο θα βρεθεί είναι 0,3m.

i) Θεωρώντας την πλάκα υλικό σημείο, αμελητέων διαστάσεων, να βρείτε το ύψος από το έδαφος, στο οποίο ηρεμεί πριν την κρούση.

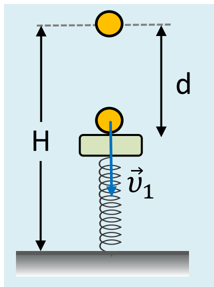
ii) Αφού υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων, πριν και μετά την κρούση, να εξετάσετε αν η κρούση αυτή είναι ή όχι ελαστική.

iii) Να υπολογιστεί η μάζα της πλάκας.

iv) Ποιο το φυσικό μήκος του ελατηρίου; Να γίνει η γραφική παράσταση του μήκους του ελατηρίου σε συνάρτηση με το χρόνο, αφού προηγουμένως βρείτε χαρακτηριστικές τιμές μήκους και χρόνου.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητα g=10m/s².

Απάντηση:



i) Έστω $υ_1$ η ταχύτητα που αποκτά η σφαίρα τη στιγμή που φτάνει στην πλάκα αφού έχει διανύσει κατακόρυφη απόσταση d, όπως στο σχήμα. Θεωρώντας μηδενική τη δυναμική ενέργεια της σφαίρας στη θέση της κρούσης, παίρνουμε από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \rightarrow$$

$$0 + m_1 g d = \frac{1}{2} m_1 υ_1^2 + 0 \rightarrow$$

$$d = \frac{υ_1^2}{2g} = \frac{3^2}{2 \cdot 10} m = 0{,}45m$$

Αλλά τότε η αρχική θέση της πλάκας, απέχει από το έδαφος (όσο και το μήκος του ελατηρίου):

$$h = H - d = 0{,}95m - 0{,}45m = 0{,}50m$$

ii) Πριν την κρούση, κινητική ενέργεια έχει μόνο η σφαίρα:

$$K_{πρ} = \frac{1}{2} m_1 υ_1^2 = \frac{1}{2}\, 1{,}2 \cdot 3^2 J = 5{,}4J$$

Κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης της πλάκας η ενέργεια διατηρείται. Αλλά τότε η πλάκα αμέσως μετά την κρούση έχει μόνο κινητική ενέργεια, ενώ τη στιγμή που φτάνει σε ύψος 0,3m, έχει απομάκρυνση ίση με 0,5m-0,3m=0,2m, ίση με το πλάτος ταλάντωσης, έχοντας μόνο δυναμική ενέργεια. Συνεπώς ισχύει:

$$\frac{1}{2}\,m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}k\,A^2 \quad (1)$$

Αλλά τότε η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων που συγκρούονται είναι:

$$K_\mu = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^{'2} + \frac{1}{2}\,m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^{'2} + \frac{1}{2}k\,A^2 \rightarrow$$

$$K_\mu = \frac{1}{2}\,1{,}2\,\cdot\left({}^{1}/_{3}\right)^2 J + \frac{1}{2}\,200\,\cdot(0{,}2)^2 J = 4{,}1J$$

Από την σύγκριση των τιμών της κινητικής ενέργειας, πριν και μετά την κρούση, βλέπουμε ότι έχουμε απώλεια μηχανικής ενέργειας, συνεπώς η κρούση είναι ανελαστική.

iii) Θεωρώντας την προς τα κάτω κατεύθυνση ως θετική, εφαρμόζουμε για την κρούση την αρχή διατήρησης της ορμής:

$$\vec{p}_{\pi\rho} = \vec{p}_\mu \;\rightarrow m_1\upsilon_1 = \;m_1\upsilon'_1 + m\upsilon_0 \;\xrightarrow{\text{(S.I.)}}$$

$$1{,}2\cdot 3 = 1{,}2\cdot\left(-{}^{1}/_{3}\right) + \;m\upsilon_0 \rightarrow \;\; m\upsilon_0 = 4 \;\;(S.I.) \quad (2)$$

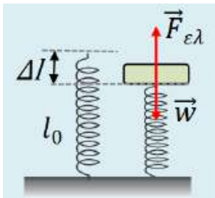
Ενώ με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}\,m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}k\,A^2 \;\;\rightarrow\;\; m\upsilon_0^2 = 200\cdot 0{,}2^2 \;= 8 \quad (S.I.)\;\;(3)$$

Με διαίρεση των (3) και (2) κατά μέλη, παίρνουμε:

$$\frac{m\upsilon_0^2}{m\upsilon_0} = \frac{8}{4} \rightarrow \upsilon_0 = 2m/s \;\;\xrightarrow{(2)}\;\; m = 2kg$$

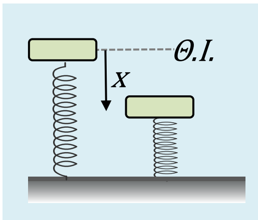
iv) Στην (αρχική) θέση ισορροπίας της πλάκας ισχύει:



$$\Sigma\,\vec{F} \;= 0 \rightarrow \;F_{\varepsilon\lambda} \;= w \;\;\rightarrow\;\; k\cdot\Delta l = mg \;\;\rightarrow$$

$$\Delta \mathrm{l} = \frac{mg}{k} = \frac{2\cdot 10}{200}m = 0{,}1m$$

Αλλά τότε το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι $l_0 \;= h + \Delta l = 0{,}5m + 0{,}1m = 0{,}6m.$



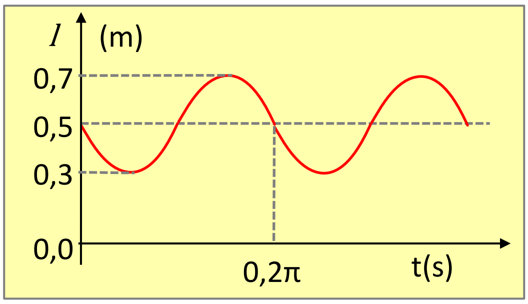
Εξάλλου για την απομάκρυνση της πλάκας από τη θέση ισορροπίας της ισχύει η εξίσωση (θετικά προς τα κάτω, οπότε φ_0=0) $x = A\eta\mu(\omega t)$ με

$$\omega = \sqrt{{}^{D}/_{m}} = \sqrt{{}^{200}/_{2}}\,rad/s = 10rad/s \;\;.$$

Έτσι, με βάση και το διπλανό σχήμα θα έχουμε για το μήκος του ελατηρίου:

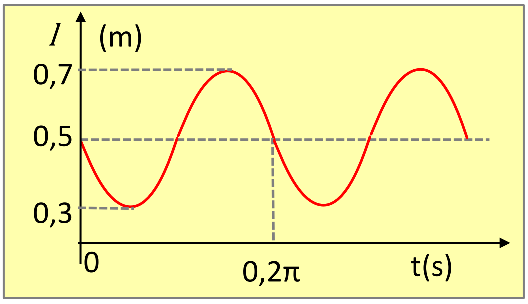
$$l = h - A\eta\mu(\omega t) = 0{,}5 - 0{,}2\,\eta\mu(10t)\ \ (S.I.)\quad (4)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η περίοδος ταλάντωσης είναι ίση με $T = {}^{2\pi}/_{\omega} = 0{,}2\pi\ s$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης (4) παίρνει τη μορφή του παρακάτω σχήματος.



Σχόλιο:

Στην παραπάνω γραφική παράσταση η αρχή των δύο αξόνων είναι στο (0,0). Αλλά αυτό δεν είναι υποχρεωτικό να το κάνουμε. Θα είχαμε πολύ πιο "καθαρή" εικόνα αν μεταφέραμε την αρχή του κατακόρυφου άξονα του μήκους και σχεδιάζαμε την παρακάτω καμπύλη.



Σκεφτείτε να είχατε να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $y = 50 - 0{,}2\,\eta\mu(10t)\ \ (S.I.)$ .....

dmargaris@gmail.com