

KVANTUMMECHANIKA

A jelen munkát elsősorban szakembereknek állítottam össze. Az anyag tanulmányozásához a megszokottnál több energia befektetésére van szükség, de úgy gondolom, megéri a fáradozást. Röviden és tömören összefoglalom azt a sok éves töprengéseim, küzdelmeim eredményeit, amely a kvantummechanika és relativitáselmélet termékeny kiterjesztésére vezetett.

Sarkadi Dezső (2008 november-december)

1. Történeti összefoglaló

Mai tudásunk szerint a mikrovilág egzakt fizikai leírásának eszköze a kvantummechanika. Mikrovilág alatt értjük az atomokat, molekulákat, elemi és nem elemi részecskéket (atommag, nukleonok, leptonok, mezonok, hadronok, kvarkok). A kvantummechanika elnevezés arra utal, hogy a mikrovilágban is érvényesek a klasszikus (Newton-i és Einstein-i relativisztikus) mechanika fogalmai, kiemelten a koordináta, idő, sebesség, impulzus, perdület, energia, stb. fogalmai. Látnunk kell, hogy ez az állítás nem feltétlenül magától értetődő. A mechanika fogalmait a világon először *Niels Bohr* alkalmazta sikeresen a mikrovilágra, nevezetesen 1913-ban megalkotta a hidrogén atomnak egy olyan mechanikai modelljét, amellyel értelmezni lehetett a hidrogén gáz jól ismert színek spektrumát. Az atommodell hasonló egy olyan Naprendszerhez, melynek egyetlen bolygója van, éspedig ez az elektron. A Napnak egy pozitív töltésű részecske, a proton felel meg. A proton képezi a hidrogén atom tömegének meghatározó részét, mérete azonban elhanyagolhatóan kicsiny az egész atom méretéhez képest. Ez az egyszerű mechanikai modell figyelembe vette a híres kísérleti fizikus, *Ernest Rutherford* (1871-1937) méréseit, miszerint az atomokban a pozitív töltés egy nagyon kicsiny átmérőjű térrészben koncentrálódik. Bohr a hidrogén atom modelljében még egy nagyon fontos feltevéssel élt, éspedig az elektron perdületének kvantálással. Planck sikeres sugárzáselmélete egy univerzális természeti állandót vezetett be, a Planck állandót, melynek dimenziója egyaránt energia \times idő, illetve impulzusmomentum (azaz perdület). Bohr a stabil elektron pályákra az elemi perdület, azaz a Planck állandó egész-számú többszörösét szabta meg. A klasszikus elektrodinamika szerint ilyen stabil elektron pályák nem tudnak kialakulni a proton körül, az elektron rövid időn behullna a protonba, folyamatos spektrumú elektromágneses hullámok kibocsátásával. A diszkrét elektronpályák bevezetésével viszont Bohr értelmezni tudta a hidrogén gáz vonalas színekét, és ami még hab volt a tortán, a modell pontosan kiadta a színekvonalak hullámhossz értékeit is. Mai szemmel nézve Bohr atommodellje gyerekesen egyszerűnek tűnik, de ha beleéljük magunkat a kor tudásszintjébe, akkor belátható, hogy ez világot megrázó hatalmas eredmény volt az akkori fizikában.

Bohr sikeres atommodellje azt sugallta, hogy a mikrovilág megismerhető a klasszikus mechanika jól ismert módszereivel, csupán azokat „kvantumfeltételekkel” kell kiegészíteni. A fizikusok csakhamar rádöbbentek, hogy Bohr egyszerű atommodellje már két vagy több elektront tartalmazó nehezebb atomokra, egyszerű molekulákra nem terjeszthető ki. A Bohr-féle atommodell finomítása *Arnold Sommerfeld* (1868-1951) nevéhez fűződik, aki az elektronpályákra a három térbeli dimenzióknak megfelelően három kvantálási szabályt vezetett be. Ennek részleteire itt nem térhetünk ki, a három ismert kvantumszám a *főkvantumszám*, a *mellékkvantumszám* és a *mágneses kvantumszám*. A mellékkvantumszám különböző excentricitású ellipszis pályákat határoz meg a hidrogén atom elektronjára. Az atomfizika általánosan elterjedt, szimbolikus emblémája erre a kiterjesztett Bohr-modellre vezethető vissza. Sommerfeld elvégezte a Bohr-modell relativisztikus számítását is, mely kiadta a hidrogén-színek finomszerkezetét. Sommerfeld, figyelemreméltó eredményei ellenére, nem tudta a Bohr-féle atommodellt általánosan alkalmazható elméletté fejleszteni.

A nagy áttörés egy különleges tehetségű embernek, *Weiner Heisenbergnek* (1901-1976) köszönhető, aki 1925-ben jelentette meg nagyjelentőségű dolgozatát. Heisenberg a színeképelemzésekből kapott atom, illetve molekulaszpektrumokat különböző táblázatokba (mátrixokba) foglalta össze. A vezérfonalat Bohr atommodellje adta, miszerint a mikrovilág leírására alkalmasak a klasszikus mechanika mennyiségei, úgymint a koordináta és impulzus. Minden atom, molekula egy-egy sugárzó oszcillátornak tekinthető, melyek nem pontosan szinuszosak, felharmonikusokat is termelnek, leírásukhoz *Fourier analízis* is szükséges. Fontosak az egyes felharmonikusok intenzitásai is, amik szintén mérhetők a színeképelemzéssel. Heisenberg vizsgálataira arra vezettek, hogy a klasszikus mechanika koordinátáihoz, illetve impulzusaihoz mátrixok rendelhetők, melyekkel sikerült az egyszerű atom, illetve molekulaszpektrumokat értelmeznie. Heisenberg „mátrixmechanikáját” *Ervin Schrödinger* (1887-1961) osztrák fizikus „hullámmechanikája” követte 1926-ban megjelent cikkével. A nevéhez fűződő Schrödinger egyenlet egy hullámegyenlet, amiről maga Schrödinger bebizonyította, hogy, ekvivalens Heisenberg mátrixmechanikájával. A két ekvivalens elméletet összefoglalóan kvantummechanikának nevezzük, mivel ebben központi szerepet játszik a Planck állandó (hatáskvantum). A Schrödinger egyenlet mind a mai napig a kvantummechanika legfontosabb alapegyenlete. Albert Einsteint nem pontosan idézve, a világban az éppen az igazán meglepő, hogy matematikával megérthető. Különösen érvényes ez a kvantummechanikára, mely egy olyan szerencsés és meglepő matematikai találat volt, hogy alkalmasnak bizonyult nemcsak a színeképvonalak pontos kiszámítására, de egyben meghatározza az egyes színeképvonalak intenzitását is. A kvantummechanika nemcsak abban különleges, hogy szakít a klasszikus fizika folytonos szemléletével, hanem ráadásul teljes mértékben a valószínűség fogalmára épít. Einstein sokáig éppen a valószínűségi leírás miatt állt szemben a kvantummechanikával (ismert mondása volt: *Isten nem kockázik!*).

Fontos kiemelni, hogy a kvantummechanikához vezető rögzös úton, mint utólag kiderült, a legelső alapvető gondolatot *Louis de Broglie* francia fizikus vetette fel még 1924-ben. Ha ugyanis a fényhez (elektromágneses hullámokhoz) részecske, azaz foton rendelhető, akkor igaznak kell lenni ennek fordítottjának is. Az anyaghoz, konkrétan a részecskékhez hullám is rendelhető, ezt szokás „anyag hullámnak” nevezni. Broglie hipotézise rövid időn belül helyesnek bizonyult, mely alapján Schrödinger megtalálta az anyag hullámegyenletét.

2. A kvantált harmonikus oszcillátor (KHO)

Bár a jelen munka címe Kvantummechanika, ebben a rövid dolgozatban nincs lehetőség, sem szándék a kvantummechanika még elemi szintű ismertetésére sem. Ezt a munkámat elsősorban szakembereknek szántam. Egy egyszerű mintafeladattal foglalkozom, a klasszikus oszcillátor kvantummechanikai megfelelőjével. Ez a példa azért kiemelten fontos, mivel szoros kapcsolatban áll Planck fekete test sugárzási elméletéhez, konkrétan Planck oszcillátor hipotéziséhez. A fekete test sugárzás Planck-féle elméletével a honlapom másik munkájában részletesen foglalkozom:

<http://www.geocities.com/fhunman/rad.pdf>

Planck a fekete test oszcillátoraira feltette, hogy azok arányosak az oszcillátor frekvenciájával, és az oszcillátor energiák kvantáltak:

$$E_n = nhf \equiv n\hbar\omega; \quad (n = 1, 2, 3, \dots) . \quad (2.1)$$

Planck élete végéig kételkedett eredményének valós fizikai tartalmában, az energia kvantálását pusztán matematikai segédeszköznek, a h Planck állandót pusztán görbeillesztési paraméternek tekintette. A Planck állandóról aztán rövid időn belül kiderült, hogy a mikrovilág leírásában centrális szerepe van, az egész kvantummechanika a h elemi hatáskvantum létezésére épül. A Planck állandó lehetséges fizikai hátteréről egy külön munkámban is írok:

A kvantummechanika picit módosította Planck hipotézisét, miszerint a kvantált harmonikus oszcillátor (KHO) lehetséges energiaértékei:

$$E_n = (n + 1/2)hf \equiv (n + 1/2)\hbar\omega; \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.2)$$

A fizikába itt lépett be először a *zéruspont energia* fogalma. Abszolút nulla fok hőmérsékleten a fekete test oszcillátorainak energiája zérustól különböző:

$$E_0 = hf / 2 \equiv \hbar\omega / 2. \quad (2.3)$$

A kvantummechanikai „sajátértékegyenlet”, melyből a kvantált harmonikus oszcillátor (KHO) energiaszintjei kiadódnak:

$$\mathbf{H}\Psi_n = \left(\frac{1}{2m}\mathbf{p}_x^2 + \frac{k}{2}\mathbf{x}^2 \right) \Psi_n = E_n\Psi_n; \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.4)$$

A jelölések itt a következők: m a harmonikus oszcillátor tömege (nyugalmi tömege), k az oszcillátor *rugóállandója*. \mathbf{H} az energia *operátora* (más néven *Hamilton operátor*), Ψ_n a kvantált oszcillátor lehetséges hullámfüggvényei, \mathbf{p}_x és \mathbf{x} az impulzus, illetve a koordináta operátorai. Az oszcillátor egy-dimenziós (lineáris) rezgést végez az x koordinátatengely mentén, az ω frekvencia a k/m hányados négyzetgyökével egyenlő. Természetesen a klasszikus oszcillátorhoz hasonlóan a KHO is a tér tetszőleges irányában végezhet harmonikus rezgőmozgást, az egyszerűség kedvéért célszerű azonban egy koordinátatengely irányt választani, jelen esetben az x -tengelyt. A fent megadott *sajátérték-egyenlet* (mely lehet egy differenciálegyenlet, jelen esetben a *Schrödinger egyenlet*) megoldásával kapjuk meg az oszcillátor lehetséges E_n energiáit, melyek (2.2) szerint adódnak. A (2.4) sajátértékegyenletben a \mathbf{H} Hamilton operátor a klasszikus mechanikából ismert: a harmonikus oszcillátor Hamilton függvényének kvantummechanikai alakja.

A Heisenberg által először megtalált mátrixmechanikában a koordináta, illetve impulzus operátorai végtelen dimenziós mátrixok. A hullámfüggvényeket végtelen dimenziós vektorok helyettesítik. A részletek megtalálhatók minden igényesebb kvantummechanikai tankönyvben, itt most csak a lényegét foglaljuk össze. *P. A. M. Dirac* nyomán a kvantált harmonikus oszcillátor Hamilton operátora a mátrixmechanikában a következő alakú:

$$\mathbf{H} = (\mathbf{a}\mathbf{a}^+ + \mathbf{a}^+\mathbf{a}) / 2, \quad (2.5)$$

ahol az \mathbf{a} és \mathbf{a}^+ operátorok végtelen dimenziós mátrixok. A szorzatoperátorok tulajdonságai:

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^+\Psi(n) = n\hbar\omega\Psi(n); \quad \mathbf{a}^+\mathbf{a}\Psi(n) = (n+1)\hbar\omega\Psi(n); \\ (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.6)$$

amelyek ismeretében:

$$\mathbf{H}\Psi(n) = E_n\Psi(n) = (n + 1/2)\hbar\omega\Psi(n); \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.7)$$

3. KHO és relativitás

A (2.4) KHO sajátérték egyenlet ránézésre (formálisan) nem-relativisztikus egyenlet, hiszen a klasszikus mechanikai oszcillátor egyenlet sem felel meg a speciális relativitásnak. (Elég itt csak annyit megjegyezni, hogy az impulzus- és koordinátaváltozók második hatványon szerepelnek az egyenletben, míg az energia az első hatványon van.)

Az elektromágneses tér (EM tér) kvantált változata, a relativisztikus *kvantumelektrodinamika* (QED) alapját éppen a kvantált harmonikus oszcillátor modell képezi. Megmutatható ugyanis, hogy mind az elektromos, mind a mágneses tér kvantálása (2.4) típusú hullámegyenletekre vezet. Tehát egy relativisztikus elmélet alapját egy nem-relativisztikus oszcillátor modell képezi, amely súlyos ellentmondásnak tűnik. A felvetett problémával nemigen foglalkoztak a fizikusok, mivel a QED rendkívül hatékony, sikeres elméletnek bizonyult, de ugyanakkor az elmélet belső ellentmondásai (divergencia problémái) is közismertek. A QED divergenciáit fizikai megfontolásokkal és különböző matematikai trükkökkel időközben sikerült eltüntetni (szőnyeg alá söpörni), de a QED ma sem tekinthető egy véglegesen lezárt elméletnek. A vizsgálataim során kiderült, hogy szerencsére (véletlenül vagy sem), a KHO megfelel a relativitáselméletnek, amennyiben a KHO-t kizárólag az elektromágneses tér kvantálási modelljének tekintjük. Ezt a következőkkel igazolom:

Az elektromágneses térhez rendelt nyugalmi tömeg zérus (a fotonok tömege zérus), ezért a relativitáselmélet szerint a fotonokra érvényes *négyesimpulzus egyenlet*:

$$p_\mu p^\mu = 0; \Rightarrow E^2 = c^2 p^2. \quad (3.1)$$

Ez az összefüggés még a klasszikus elektrodinamikából ismert, az elektromágneses hullám energiája és impulzusa arányos egymással, és az arányossági tényező a fénysebesség. Ezt a kvantált harmonikus oszcillátorra is meg kell követelnünk:

$$\mathbf{H}^2 \Psi(n) = E^2 \Psi(n) = c^2 p^2 \Psi(n). \quad (3.2)$$

A KHO mátrixos reprezentációjában a ZP energiára két egyenlet írható fel:

$$\left(\mathbf{H} - \mathbf{a}\mathbf{a}^+\right) \Psi(n) = \frac{1}{2} \hbar \omega \Psi(n); \quad \left(\mathbf{H} - \mathbf{a}^+\mathbf{a}\right) \Psi(n) = -\frac{1}{2} \hbar \omega \Psi(n), \quad (3.3)$$

amelyből:

$$\left(\mathbf{H} - \mathbf{a}^+\mathbf{a}\right)^2 \Psi(n) \equiv \left(\mathbf{H} - \mathbf{a}\mathbf{a}^+\right)^2 \Psi(n); \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.4)$$

Legyen (2.6) alapján: $a_n = n\hbar\omega; \quad a_{n+1} = (n+1)\hbar\omega,$ (3.5)

akkor a (3.4) egyenlet egy algebrai azonosságra vezet:

$$\left(E - a_{n+1}\right)^2 \equiv \left(E - a_n\right)^2; \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.6)$$

Ez utóbbi egyenletet használhatjuk fel a (3.2) követelmény teljesítésére. Teljesüljön (3.6) helyett a következő:

$$\boxed{\left(E - a_{n+1}\right)^2 \equiv \left(cp - a_n\right)^2; \quad (n = 0, 1, 2, \dots)} \quad (3.7)$$

A (3.7) algebrai egyenlet tetszőlegesen kicsiny frekvenciákra, illetve tetszőlegesen nagy kvantumszámokra is teljesülni kell, ennek feltétele:

$$E^2 = c^2 p^2, \quad (3.8)$$

4. A kvantált harmonikus oszcillátor általánosítása

Az előzőekből kiderült, hogy a kvantált harmonikus oszcillátor modellje kizárólag a kvantált elektromágneses térrel kapcsolható össze. Világos, hogy Planck felfedezése idején még sem a kvantummechanika, sem a kvantumelektrodinamika nem létezett, így például a ZP energia is ismeretlen volt. Planck a fekete test atomjainak, molekuláinak oszcillátoraiban gondolkozott. Szerencsére azonban ezzel nem követett el hibát, mivel a fekete test sugárzás, vagy más néven *üregsugárzás* termodinamikai egyensúlyban áll az üregben kialakuló fotongázzal. Kísérletileg ugyanis a fekete test spektrumát egy T hőmérsékletre felmelegített „üreg” (zárt doboz) segítségével mérik, amelynek oldalán lévő apró lyukon keresztül „vezetik ki” az EM sugárzást. Az üreg belső fala és az EM tér között folyamatos energiacsere valósul meg, a fotonok kibocsátása és elnyelése termodinamikai egyensúly miatt azonos intenzitású. Ennek megfelelően a fekete test emissziós spektruma megegyezik a fotongáz emissziós spektrumával.

Az atomoknak, molekuláknak nyugalmi tömege van, ezért a relativitáselmélet szerinti (3.1) egyenlet módosul:

$$p_\mu p^\mu = m^2 c^4; \quad \Rightarrow \quad E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2. \quad (4.1)$$

Itt m lehet az elektron, atom, molekula stb. (részecske) nyugalmi tömege. Erre az egyenletre sajnos nem tudjuk felírni a (3.7) egyenlet általánosítását, mivel a részecske impulzusa, a fotonnal ellentétben, *koordinátafüggő*. Speciálisan, a részecske nyugalmi rendszerében az impulzusa *definíció* szerint zérus. Nyugalmi rendszerben a tömeggel rendelkező részecskék esetén a (3.7) egyenletet első gondolatra a következővel helyettesíthetjük:

$$(E - a_{n+1})^2 \equiv (mc^2 - a_n)^2; \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.2)$$

Ez a megoldás többek között azért nem elfogadható, mivel $m = 0$ határesetben nem kapjuk vissza a fotonokra érvényes (3.7) egyenletet.

A probléma csak a relativitáselmélet kiterjesztésével oldható meg.

Nincs más lehetőség, mint hogy a részecske nyugalmi rendszerében a (3.7) egyenletet a következő alakkal kell helyettesíteni:

$$(E - a_{n+1})^2 \equiv (cP - a_n)^2 + m^2 c^4; \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.3)$$

Ez feltételezi, hogy a részecskének a nyugalmi rendszerében is van impulzusa, de ez nem a részecske téridőbeli mozgását jellemzi, hanem a részecskének egy belső fizikai tulajdonsága, a részecske-spinhez hasonlóan:

A P impulzust a részecske sajátimpulzusának nevezzük!

Ha a (4.3) egyenletben az m tömeg zérushoz tart, visszakapjuk a fotonokra érvényes (3.7) egyenletet, ekkor a foton sajátimpulzusa megegyezik a foton hagyományos impulzusával.

A (4.3) egyenletben szereplő a_n pozitív definit sorozatról könnyen megmutatható, hogy ha m zérustól különböző, akkor a_n szigorúan monoton csökkenő sorozatot alkot. Nem célunk a paraméterek számának növelése, ezért a sorozat nulladik tagját cP -nek választjuk:

$$a_0 \equiv cP. \quad (4.4)$$

Nagy n értékek esetén az a_n sorozat elemei elhanyagolhatóan kicsik, ezért (4.3)-ból az

$$E^2 \cong c^2 P^2 + m^2 c^4 \equiv M^2 c^4 \quad (4.5)$$

egyenletre jutunk (a részecske nyugalmi rendszerében vagyunk!). Az M tömeget a továbbiakban, megkülönböztetési céllal, megfigyelhető tömegnek nevezzük, míg az m tömeget a részecske *bázistömegének*. Foton esetében a bázistömeg zérus, ekkor az M tömeg nem nevezhető nyugalmi tömegnek, de nevezhetjük a *foton ekvivalens tömegének*.

Fotonok esetén (3.5) szerint:

$$a_n = n\hbar\omega; \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (4.6)$$

míg részecskék esetén (4.3)-ból megmutatható, hogy közelítőleg:

$$a_n \cong \hbar\omega q^n; \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (4.7)$$

ahol

$$0 \leq q \equiv E / cP < 1. \quad (4.8)$$

A kvantált harmonikus oszcillátor által kibocsátott, vagy elnyelt fotonenergia kizárólagosan:

$$E_{foton} = a_{n+1} - a_n = \hbar\omega; \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (4.9)$$

amíg részecskék esetén a kibocsátott, vagy elnyelt fotonenergia kizárólagosan:

$$E_{foton} = a_n \cong \hbar\omega q^n; \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (4.10)$$

Ha a részecske bázistömege zérus, azaz q értéke eggyel egyenlő, ekkor a (4.10) képlet helyesen a KHO-ra érvényes (4.9) fotonenergiát adja vissza.

Érdeemes itt kitérni egy fontos dologra: a fizikában mindig elsőrendű cél volt az anyagi és nem-anyagi (fény) objektumok egységes fizikai alapokra helyezése, kiemelten a fény és az anyag egységes kölcsönhatási elméletének megtalálása. Ennek a fontos fizikai problémának megoldásában éppen a huszadik században történtek meg a legnagyobb lépések. Véleményem szerint Planck sugárzási törvénye, a fényelektromos hatás értelmezése, a Bohr atommodell és a kvantummechanika megszületése tartoznak ezekhez a nagy áttörő lépésekhez. Tágabb értelemben a fénysebesség állandóságának tapasztalatai törvénye, és az erre épülő relativitáselmélet is az anyag és a fény kapcsolatát jellemző fontos fizikai információ. Például a fénysebes-

ség mérése szükségszerűen „anyagi” vonatkoztatási rendszerekben, „anyagi” műszerekkel történik, tehát az ilyen mérések egyben az anyag és a fény kölcsönhatását tükrözik.

A (4.5) egyenletet formálisan a következő alakban is felírhatjuk:

$$M^2 c^4 = E_0^2 + c^2 P^2; \quad E_0^2 \equiv m^2 c^4. \quad (4.11)$$

Ez az egyenlet emlékeztet bennünket a relativitáselméletben kiemelt szerepet játszó *négyesimpulzus-négyzet* kifejezésre. Egy „apró” eltérés viszont lényeges, az impulzus plusz előjellel szerepel mínusz helyett, ezért is jelöltük P -vel, p helyett. P a részecske sajátimpulzusa, mely a részecskének egy belső, specifikus tulajdonsága, a spin analógja. A mai fizikában ez a fogalom ismeretlen, de bevezetése szükségszerű volt, a kvantált elektromágneses tér elméletének és az elemi részecske (kvantált) elméletének harmonizálása céljából. A sajátimpulzus fogalmának bevezetésével eljutottunk a relativitáselméletnek egy logikus kiterjesztéséhez, a „pluszos” relativitáshoz. Ennek részleteit ismertetem a honlapomon:

<http://www.geocities.com/fhunman/relativity.pdf>

A fenti eredmények lényege röviden összefoglalható: a tömegnek szerkezete van. A megfigyelhető (kísérleti) tömeg mértéke egy olyan derékszögű háromszög átfogójával egyezik meg, melynek egyik befogója a sajátimpulzus tömeg, a másik befogója a bázistömeg. Ha egy részecske kötött állapotba kerül, a szabad állapotú tömege lecsökken a (4.10) által meghatározott energia-kvantum egyikével. A részecske tömege a legmélyebb kötött állapotában a bázistömegével egyezik meg. Ezt nevezzük a kötött részecske ZP energiájú (ZP tömegű) állapotának, amikor már a részecske további energia leadására már nem képes (a sajátimpulzusa ekkor zérus).

Megadtuk továbbá a részecskének (tömegnek) egy olyan kvantálási módszerét is, mely a kvantált elektromágneses tér megfelelője. A tömeg kvantálása diszkrét energiaszintekre vezet (4.10)-nek megfelelően. Az energiaszintek pontos értékeit a (4.3) rekurziós képlet adja, a (4.4) kezdeti értékkel.

A tömeg kvantálása elvezetett a TÖMEGOSZCILLÁTOR fogalmához.

A tömegoszillátor a harmonikus oszcillátornak egy olyan általánosítása, amely határesetben visszaadja a harmonikus oszcillátor által egyidőben emittálható, vagy abszorbeálható energiát.

5. A tömegoszillátor és Planck sugárzási törvénye

Amint az előzőekben említettük, az üreg fala és az üreget kitöltő EM sugárzás adott T hőmérsékleten termodinamikai egyensúlyban van. A fotonok elnyelése és kisugárzása ekkor azonos intenzitású. A fekete test (üreg) által időegységenként kisugárzott energia mennyiségére jellemző az *átlagos oszcillátor energia*, mely a sugárzási frekvencia és az abszolút hőmérséklet függvénye. Planck vizsgálata szerint az átlagos oszcillátor energia kifejezése:

$$\bar{\varepsilon}(\omega, T) = \hbar\omega / \left(e^{\hbar\omega/kT} - 1 \right), \quad (5.1)$$

ahol k a Boltzmann állandó. Planck erre az eredményre a (2.1) feltevessel jutott, azaz feltételezte, hogy a fekete test oszcillátorainak energiája a $\hbar\omega$ energiakvantum egész-számú többszöröse lehet. A fentiekben megállapítottuk, hogy ez nem a fekete test atomi oszcillátorainak

lehet az energiája, hanem az EM sugárzási tér oszcillátorainak. A vizsgálataink szerint csak a tömegoszcillátor modell lehet alkalmas a fekete test atomi oszcillátor energiáinak kiszámítására. A termodinamikai egyensúly feltétele, hogy az atomi oszcillátorok átlagos energiája megegyezzen a Planck által meghatározott (5.1) átlagos energiával.

Megmutatjuk, hogy az atomi oszcillátorok valóban tömegoszcillátorok, és átlagos energiájuk azonos a Planck-féle átlagos oszcillátor energiával.

A kvantált harmonikus oszcillátorok (KHO) esetében az oszcillátor energia az n kvantumszámmal arányosan növekszik, ezért Planck feltételezte, hogy a nagyenergiájú atomi oszcillátorok előfordulási valószínűsége exponenciálisan csökken (ez az ún. Boltzman eloszlási törvény következménye). A tömegoszcillátorok (TO) energiaszintjei viszont közelítőleg mértani sorozattal (exponenciálisan) csökkennek az n kvantumszám növekedésével. Ezért a tömegoszcillátoroknál csupán azt kell kikötni, hogy a fekete test minden atomja (részecskéje) az összes lehetséges TO energiát azonos valószínűséggel sugározza ki.

A tömegkvantálást eddig kizárólag az *atommag fizikára* alkalmaztam, nagyon úgy tűnik, hogy sikeresen. Az energiaszinteket meghatározó rekurziós formulát a magfizikában szokásos MeV (megaelektronvolt) egységekre írtam át, amelyben a tömeg és energia egysége azonos:

$$\begin{aligned} M^2 &= C^2 + R^2; \\ (M - a_{n+1})^2 &= (C - a_n)^2 + R^2; \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \\ a_0 &= C \equiv qM; \quad 0 < q < 1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Az M megfigyelhető (kísérleti) tömeg lehet például a proton, vagy a neutron tömege, az m bázistömeget R -rel, a sajátimpulzus tömeget pedig C -vel jelöltem. Az a_n energiákat természetesen MeV egységekben kapjuk. A részletes vizsgálatok szerint a kvantált nukleonok lehetséges energiaszintjeit meghatározó q értéke közelítőleg:

$$q \equiv Q \cong 2 / 9 = 0.222\dots \quad (5.3)$$

A honlapom „Q-fizikával” foglalkozó részében számos példával igazolom, hogy a dimenziótlan $Q = 2 / 9$ -es szám kitüntetett szerepet játszik a fizika majd minden területén:

<http://www.geocities.com/fhunman/qfiz.pdf>

A **Függelékben** bizonyítom, hogy a tömegoszcillátor átlagos energiája:

$$\bar{\varepsilon}(\omega, T) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \hbar\omega / (e^{\hbar\omega/kT} - 1), \quad (5.4)$$

ahol a_n a tömegoszcillátor emittálható, illetve abszorbeálható energiái. Mivel egyetlen TO csak egyetlen energiakvantumot képes kisugározni, vagy elnyelni, a képlet csak nagyszámú TO átlagára vonatkozik, ez egyben a hőmérséklet definiálhatóság követelménye is. A Függelék szerint az átlagos oszcillátor energia paramétereinek kifejezése a TO változókkal:

$$\hbar\omega \equiv C / 2 \equiv qM / 2; \quad e^{\hbar\omega/kT} \equiv M / C \equiv 1 / q \quad (5.5)$$

A nukleonokhoz tartozó átlagos oszcillátor energia (5.5) ismeretében:

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \hbar\omega / (e^{\hbar\omega/kT} - 1) \equiv \frac{QM}{2} \times \frac{Q}{1-Q} = 29.809... \text{ MeV}, \quad (5.6a)$$

ahol M az átlagos nukleon tömeget jelöli:

$$M \cong 939 \text{ MeV}. \quad (5.6b)$$

Tetszőleges tömegoszcillátor hőmérséklete:

$$T = \frac{C}{2k \ln(M/C)} \equiv \frac{qM}{2k \ln(1/q)}; \quad (k = \text{Boltzmann állandó}). \quad (5.7)$$

Látható, hogy a tömegoszcillátor hőmérséklete a tömegével arányos. Fotonok esetében a fentiek szerint a q paraméter egyhez tart, ami a hőmérséklet képlet nevezője miatt határértékben végtelen hőmérsékletre vezet.

Speciálisan a nukleonokhoz rendelhető hőmérséklet (M az átlagos nukleon tömeg):

$$T = \frac{QM}{2k \ln(1/Q)} = 8.049... \times 10^{11} \text{ K}, \quad (5.8)$$

ahol a *Boltzmann állandó* értéke MeV / Kelvin egységben:

$$k = 8.617343... \times 10^{-11} \text{ MeV} / \text{K}. \quad (5.9)$$

A nukleon tömegoszcillátor hőmérséklet egyben speciális tömeget (energiát) is definiál, ugyanis (5.8) átrendezéséből:

$$m_0 = 2kT \equiv \frac{QM}{\ln(1/Q)} = 138.733... \text{ MeV}$$

Az m_0 tömeg megfelel a π -mezon tömegének!

(5.10)

A számítások POWER BASIC programja a **Függelék** végén található.

Függelék

A tömegoszcillátor (tömegkvantálás) definíciója:

$$\begin{aligned} M^2 &= C^2 + R^2; \\ (M - a_{n+1})^2 &= (C - a_n)^2 + R^2; \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \\ a_0 &= C \equiv qM; \quad 0 < q \leq 1. \end{aligned}$$

Amit bizonyítani kell:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{C}{2} \frac{q}{1-q} \equiv \frac{C}{2} \times \frac{1}{1/q-1};$$

$$(\hbar\omega = C/2 \equiv qM/2; e^{\hbar\omega/kT} = M/C \equiv 1/q).$$

A rekurziós formulát M^2 -el osztva a következő formába írható:

$$(1 - \alpha_{n+1})^2 = (q - \alpha_n)^2 + (1 - q^2);$$

$$(\alpha_0 = C/M = q).$$

A normált rekurziós egyenletből a következő adódik:

$$\alpha_n^2 - \alpha_{n+1}^2 = 2(q\alpha_n - \alpha_{n+1}).$$

Adjuk össze a fenti egyenleteket n minden értékére:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n^2 - \alpha_{n+1}^2) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (q\alpha_n - \alpha_{n+1}).$$

Bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n; \quad Y = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1}; \quad U = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2; \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1}^2,$$

amelyekkel az összegzett egyenlet áttekinthető alakba írható:

$$U - V = 2qX - 2Y.$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$X - Y = \alpha_0 \equiv q; \quad U - V = \alpha_0^2 \equiv q^2.$$

Négy ismeretlen van: X, Y, U, V és csak három egyenlet. Szerencsére két ismeretlen (U és V) azonnal eltűnik:

$$U - V = 2qX - 2Y = q^2,$$

és így az X és Y összegekre két egyenletünk maradt:

$$2qX - 2Y = q^2; \quad X - Y = q.$$

Az Y összeget ezekből kifejezve:

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \frac{1}{2} \frac{q^2}{1-q}.$$

Az eredményt megszorozva az M tömeggel:

$$M \times Y = M \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{M}{2} \frac{q^2}{1-q} = \frac{C}{2} \frac{q}{1-q}.$$

Ezzel a tételünket bizonyítottuk.

(Ez az elegáns bizonyítás *Dr. Kolonits Ferenc* nevéhez fűződik.)

A NUKLEONOK KVANTÁLÁSA

REM TNUKLEON.BAS 2008. DECEMBER SARKADI DEZSO

REM POWER BASIC

REM NUKLEON TOMEGOSZCILLATOR

X\$ = "===== TNUKLEON.BAS ====="

CLS: PRINT: PRINT X\$: PRINT

DEFDBL A-Z REM DUPLA PONTOSSAG

REM =====

K = 8.617343D-11 REM BOLTZMANN CONST. (MeV/Kelvin)

Q0 = 2 / 9 REM Q = Q0 NEVLEGES

M = 939 REM ATLAGOS NUKLEON TOMEG (MeV)

REM =====

REM ATLAGOS OSZCILLATOR ENERGIA:

EM = (M / 2) * (Q0^2 / (1 - Q0))

REM NUKLEON TOMEGOSZCILLATOR HOMERSEKLET:

T = Q0 * M / (2 * K * LOG(1 / Q0))

REM ATLAGOS MEZON TOMEG:

M0 = Q0 * M / LOG(1 / Q0)

REM =====

PRINT "EM ="; EM; "MeV": PRINT

T = T * 1D-11

PRINT "T ="; T; "* 1D+11 KELVIN FOK": PRINT

PRINT "M0 ="; M0; "MeV": PRINT

END

□

===== TNUKLEON.BAS =====

EM = 29.80952380952381 MeV

T = 8.049696690711412 * 1D+11 KELVIN FOK

M0 = 138.733995414004 MeV