

Bab 6

Barisan dan Deret

Standar Kompetensi

Memahami sifat-sifat bilangan berpangkat dan bentuk akar serta penggunaannya dalam memecahkan masalah sederhana



Kompetensi Dasar

- 6.1 Menentukan pola barisan bilangan sederhana
- 6.2 Menentukan suku ke- n barisan aritmatika dan barisan geometri
- 6.3 Menentukan jumlah n suku pertama deret aritmatika dan deret geometri
- 6.4 Memecahkan masalah yang berkaitan dengan barisan dan deret

Apa yang akan kamu pelajari?

- Pola bilangan ganjil dan genap.
- Pola bilangan persegi, segitiga dan persegipanjang.
- Pola bilangan pada Segitiga Pascal.

Kata Kunci:

- Pola
- Pola Bilangan Ganjil.
- Pola Bilangan Genap.
- Pola Bilangan Persegi.
- Pola Bilangan Segitiga.
- Pola Bilangan Persegipanjang.
- Pola Bilangan Segitiga Pascal.

A *Pola Bilangan Genap dan Bilangan Ganjil*

Sebelum kita belajar lebih jauh, untuk mendalami pola bilangan lakukan kegiatan berikut ini.

Bahan : Satu lembar kertas.

1. Lipatlah satu lembar kertas (berbentuk persegipanjang) sehingga menjadi 2 bagian yang sama. Guntinglah menurut lipatan tersebut. Ada berapa banyak potongan kertas?
2. Susunlah semua potongan kertas tersebut sehingga saling menutup. Lipatlah susunan kertas tersebut menjadi 2 bagian yang sama, kemudian guntinglah menurut lipatan tersebut. Ada berapa banyak potongan kertas sekarang? Catatlah banyaknya potongan kertas yang terjadi pada tabel di bawah.
3. Lakukan kegiatan tersebut sampai 6 kali.

Banyak lipatan kertas	1	2	3	4	5	6
Banyak potongan kertas	2	4	8

Diskusi 1

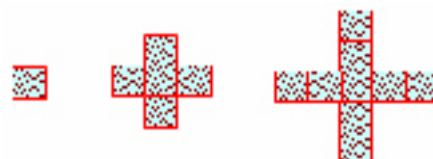
Diskusikan dengan temanmu untuk menjawab pertanyaan berikut ini.

- Apakah banyaknya lembaran kertas yang terjadi mempunyai keteraturan? Jika ya, jelaskan keteraturannya!
- Apakah dapat ditentukan banyaknya lembaran kertas yang terjadi, jika dilipat sebanyak 8 kali seperti cara di atas? Berapakah banyaknya lembar kertas itu?

Banyaknya lembaran kertas yang terjadi, jika dilipat dengan cara di atas membentuk *pola*. 2, 4, 8, ... merupakan salah satu contoh pola bilangan. Isilah tiga bilangan berikutnya dan tanda titik tiga

Diskusi 2

- Perhatikan tiga rangkaian pola berikut.



- Gambarlah rangkaian keempat dan kelima.
- Berapakah banyaknya persegi yang diarsir pada rangkaian keempat dan kelima?
- Bayangkan rangkaian keenam. Jelaskan rancangan itu menurut kalimatmu.

Kamu dapat membentuk pola bilangan dari gambar di atas, yaitu 1, 5, 9, ...

1 merupakan *suku pertama*,

5 merupakan *suku kedua*,

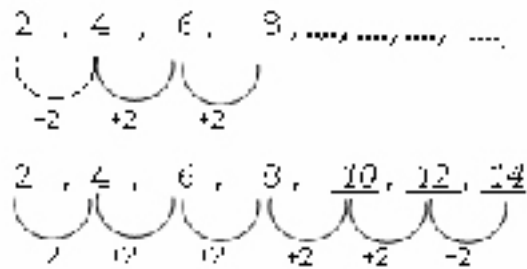
9 merupakan *suku ketiga*, dan seterusnya.

Untuk menentukan bilangan pada suku tertentu harus diketahui dahulu *aturan* yang digunakan untuk mendapatkan bilangan pada suku berikutnya.

- Perhatikan pola bilangan 2, 4, 6, 8, ...

Tentukan bilangan-bilangan pada ketiga suku berikutnya! Bagaimana aturan untuk mendapatkan suku berikutnya?

3. Untuk mencari ketiga suku berikutnya pada soal berikut dicari dengan cara berikut.



Jadi tiga suku berikutnya adalah 10, 12, dan 14.

Aturannya adalah *dimulai dengan bilangan 2 dan suku-suku berikutnya didapat dengan menjumlahkan suku sebelumnya dengan 2.*

Coba kamu menemukan **cara lain (caramu sendiri)** selain dengan cara di atas. Tuliskan aturanmu itu!

4. Perhatikan pola bilangan 1, 3, 9, 27, ... Berapakah bilangan pada ketiga suku berikutnya? Tulislah aturan untuk

Diskusi 3

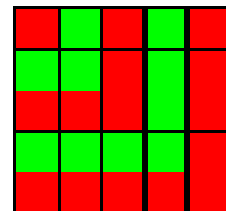
Pola Bilangan Ganjil

1. Perhatikan gambar noktah-noktah berikut.

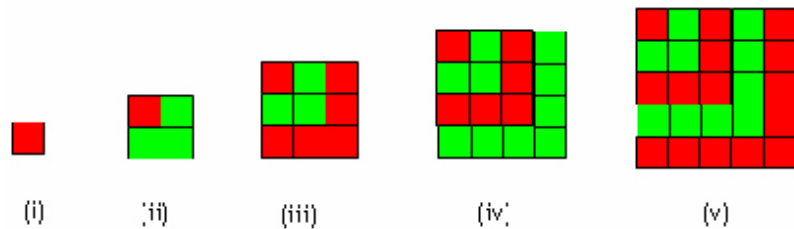


- Apakah gambar di atas membentuk suatu pola? Jelaskan!
- Hubungkan masing-masing pola di atas dengan suatu bilangan yang ditunjukkan dengan banyaknya noktah dalam pola itu. Pola bilangan apakah yang kalian dapat? Jelaskan!

2. Perhatikan gambar persegi di samping. Apakah antara persegi yang *berwarna merah* (berwarna gelap) dengan yang berwarna hijau (berwarna terang) membentuk pola bilangan yang sama dengan pola pada Masalah 1? Jelaskan!



3. Selanjutnya, kita bandingkan jumlah bilangan-bilangan ganjil terhadap luas persegi berikut ini.



Dari pola-pola di atas dapat kita buat tabel berikut ini.

Pola	Penjumlahan Bilangan Ganjil	Banyaknya Bilangan	Luas persegi
(i)	$1 = 1$	1	$1 \times 1 = 1$
(ii)	$1 + 3 = 4$	2	$2 \times 2 = 4$
(iii)	$1 + 3 + 5 = 9$	3	$3 \times 3 = 9$
(iv)	$1 + 3 + 5 + 7 = 16$	4	$4 \times 4 = 16$
(v)	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$	5	$5 \times 5 = 25$

Bagaimanakah hubungan antara hasil penjumlahan bilangan-bilangan yang pertama dan terurut ganjil dengan luas persegi?

Dengan demikian, bagaimanakah rumus jumlah dari n bilangan ganjil yang pertama?

Diskusi 2

Pola Bilangan Genap

Perhatikan gambar berikut.



- Hubungkan masing-masing pola di atas dengan suatu bilangan yang ditunjukkan dengan banyaknya noktah. Pola bilangan apakah yang kamu dapat? Jelaskan.
- Apakah gambar di samping menunjukkan pola bilangan genap? Jelaskan!
- Buatlah tabel yang menyatakan hubungan antara hasil penjumlahan bilangan genap dengan luas persegi-panjang, seperti penjelasan pada pola bilangan ganjil.
- Bagaimanakah hubungan antara hasil penjumlahan bilangan genap dengan luas persegipanjang?



B Pola Bilangan Segitiga

Pernahkah kamu menjumpai “pemandu sorak (cheerleader)” melakukan atraksinya dalam suatu pertandingan olahraga (misalnya basket)? Seringkali dalam atraksinya mereka membentuk piramida manusia, yaitu saling berdiri di antara pemain-pemainnya, sehingga pada puncaknya hanya berdiri seorang saja. Pada gambar di samping bawah ini dianggap bahwa piramida manusia tersebut belum mencapai puncak.

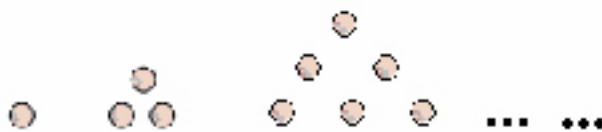


Sumber: google.com

Piramida manusia tertinggi pernah dibuat pada tahun 1981 di Spanyol. Tingginya adalah 9 tingkat. Bagaimana cara mereka membuat piramida itu? Lakukan kegiatan berikut.

Diskusi 3

- Apakah piramida manusia itu berbentuk limas? Sebutkan bentuk yang tepat untuk menjelaskannya!
- Berapa banyak orang bila tingginya 2 tingkat, dan 3 tingkat?
- Misalkan satu orang dalam piramida tersebut digambarkan dengan tanda “○” pada suatu piramida. Gambarlah pola banyaknya orang dalam piramida manusia itu.



Banyaknya tanda “ \odot ” pada suatu piramida menunjuk pada bilangan 1, 3, 6, Karena bentuknya seperti segitiga, maka pola bilangan itu dinamakan *Pola bilangan segitiga*.

4. Buatlah tabel untuk menunjukkan banyaknya tingkat dan banyaknya orang dalam piramida itu. (Selesaikan tabel ini dengan mengisi bagian ...)

Tingkat	1	2	3	4	5	6	7
Banyaknya orang	1	3	6

5. Perhatikan polanya. Bagaimanakah hubungan banyaknya orang dalam piramida manusia itu dengan banyaknya tingkat?
6. Lanjutkan tabel di atas. Berapa banyaknya orang bila tingkatnya 9?
7. **Berpikir Kritis.** Coba kalian tentukan banyaknya orang pada tingkat tertentu, tanpa harus mengetahui banyak orang pada tingkat sebelumnya? Jelaskan jawabanmu itu!

C

Pola Bilangan Persegi



Sumber: Dit. PSMP, 2006

Setiap tahun suatu perusahaan penerbangan mengadakan pertunjukan dirgantara.

Secara bergantian pesawat-pesawat terbang tinggal landas dan membentuk formasi-formasi tertentu.

Pada grup pertama, sebuah pesawat tinggal landas, kemudian grup kedua dengan tiga pesawat yang tinggal landas. Berikutnya grup ketiga dengan lima pesawat yang tinggal landas, kemudian grup keempat dengan tujuh pesawat.

Berapakah jumlah pesawat yang berada di angkasa, setelah penerbangan grup keempat, bila pesawat-pesawat pada grup-grup sebelumnya belum mendarat?

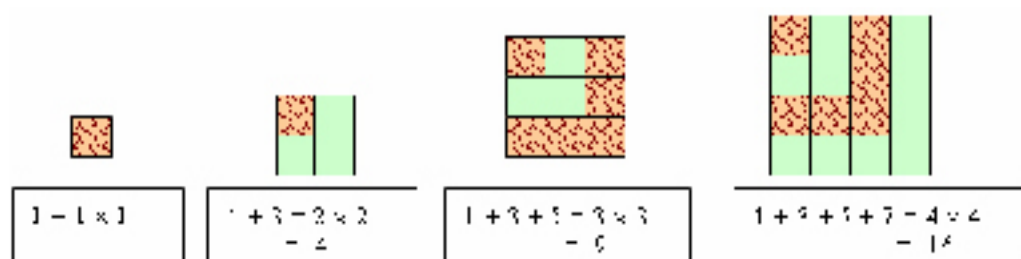
Untuk menjawabnya lakukan kegiatan berikut.

Diskusi 6

- Perhatikan tabel berikut. Berapakah jumlah pesawat yang berada di angkasa, setelah penerbangan grup ketiga, kemudian sesudah penerbangan keempat, bila pesawat-pesawat pada grup-grup sebelumnya belum

Grup ke-	Banyaknya Pesawat Baru	Jumlah pesawat di angkasa
1	1	$1 = 1 + 0$
2	3	$4 = 1 + 3$
3	5
4	7

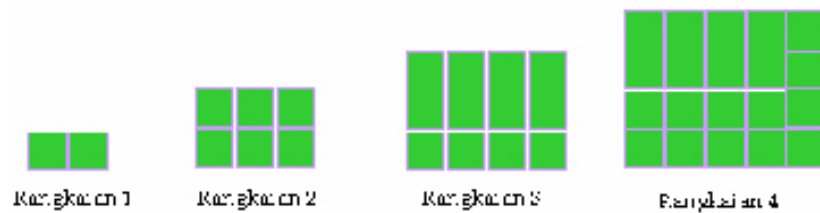
- Jika pola penerbangan di atas dilanjutkan, berapa banyak pesawat yang diterbangkan pada penerbangan grup ke-5 dan ke-6?
- Berapakah jumlah pesawat yang ada di angkasa setelah penerbangan grup ke-5 dan ke-6, bila pesawat-pesawat pada grup-grup sebelumnya belum mendarat?
- Jelaskan dan diskusikan hubungan antara grup pesawat dan jumlah pesawat yang ada di angkasa
- Bilangan-bilangan pada kolom ke-3 pada tabel di atas merupakan *bilangan kuadrat*.
- Perhatikan model dari bilangan kuadrat berikut. Apakah membentuk pola bilangan kuadrat?



Karena bilangan-bilangan 1, 4, 9 dan 16 berhubungan dengan bentuk persegi, maka pola bilangan itu dinamakan juga *pola bilangan persegi*.

D Pola Bilangan Persegi Panjang

Di kota-kota besar, lahan untuk berkebun sudah makin berkurang atau bahkan tidak ada lagi. Sehingga untuk berkebun atau menanam tanaman digunakan pot-pot yang berbentuk persegi satuan dari kayu-kayu yang diisi dengan tanah. Berikut rangkaian pot-pot tersebut.



Diskusi 7

1. Apakah banyaknya pot-pot tersebut membentuk suatu pola? Tuliskan pola itu.

Karena bilangan 2, 6, 12 dan 20 berhubungan dengan bentuk persegipanjang, maka pola bilangan ini dinamakan *pola bilangan persegipanjang*.

2. Dapatkah kamu menunjukkan bilangan pada suku kelima?

Dari pola-pola di atas dapat dibuat tabel berikut.

Rangkaian ke	Banyak persegi	Luas Persegipanjang
1	2	$1 \times (1 + 1) = 2$
2	6	$2 \times (2 + 1) = 6$
3	12	$3 \times (3 + 1) = 12$
4
5

Apakah suku kelima sama dengan 30?

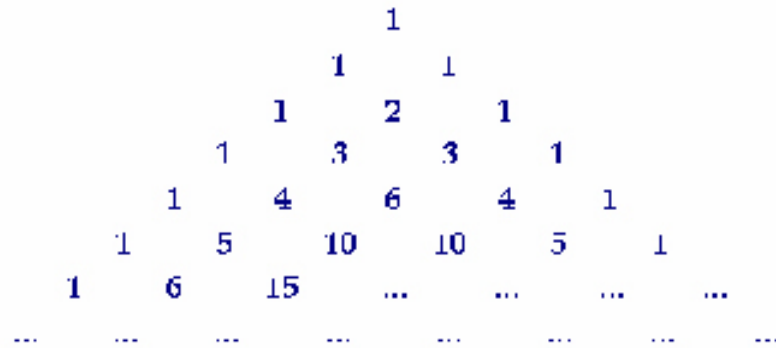
3. Dari soal nomor 1, Berapa banyak pot yang ada pada suku ke-n (rangkaian ke-n)?



Pola Bilangan Pada Segitiga Pascal

Susunan bilangan berikut telah dikenal di Cina kira-kira tahun 1300. Susunan bilangan itu dinamakan Segitiga Pascal, setelah matematikawan Perancis, Blaise Pascal mempublikasikan pola ini pada tahun 1653.

Pola berikut ini merupakan pola bilangan segitiga Pascal itu.



Diskusi 8

1. Perhatikan pola bilangan Segitiga Pascal di atas. Isilah titik-titik pada susunan bilangan itu.
2. Bagaimanakah aturan untuk mengisi titik-titik itu?
3. Jika susunan bilangan 1 merupakan baris ke-1, susunan bilangan-bilangan 1 1 merupakan baris ke-2, susunan bilangan-bilangan 1 2 1 merupakan baris ke-3, bilangan berapa saja pada baris ke-6?
4. Berapakah jumlah bilangan pada baris ke-6?
5. Buatlah tabel yang menyatakan hasil penjumlahan bilangan pada tiap baris segitiga Pascal.

Baris ke	Penjumlahan Bilangan	Hasil Penjumlahan
1	1	$1 = 2^{1-1} = 2^0$
2	1 + 1	$2 = 2^{2-1} = 2^1$
3	1 + 2 + 1	$4 = 2^{3-1} = 2^2$
4	1 + 3 + 3 + 1	$8 = 2^{4-1} = 2^3$
5	1 + 4 + 6 + 4 + 1	$\dots = 2^{\dots} = \dots$

6. Perhatikan dan amatilah suatu Segitiga Pascal.
 Jumlah bilangan-bilangan pada baris ke-1 adalah 1.
 Jumlah bilangan pada baris ke-2 adalah 2.
 Jumlah bilangan pada baris ke-3 adalah 4.
 Jumlah bilangan pada baris ke-4 adalah 8.
 Berapa jumlah barisan ke-n dari pola bilangan segitiga Pascal itu?
7. Tahukah Kamu? Salah satu kegunaan dari barisan bilangan Segitiga Pascal adalah untuk menentukan koefisien-koefisien suku-suku hasil perpangkatan $(a+b)$.

$$\begin{array}{rcccc}
 (a+b)^0 & & & & 1 \\
 (a+b)^1 & & & 1 & 1 \\
 (a+b)^2 & & 1 & 2 & 1 \\
 (a+b)^3 & 1 & 3 & 3 & 1
 \end{array}$$

Perhatikan $(a+b)^3$ di atas.

Koefisien dari a^3 adalah 1, koefisien dari a^2b adalah 3, koefisien dari ab^2 adalah 3 dan koefisien dari b^3 adalah 1.

Sekarang perhatikan $(a+b)^5$, kemudian carilah koefisien dari a^5 , koefisien dari a^4b , koefisien dari a^3b^2 , dan koefisien dari a^2b^3 ?

Apa yang akan kamu pelajari?

- Pengertian barisan bilangan, suku, dan suku ke-n.
- Menentukan suku berikutnya dari suatu barisan.
- Menentukan suku ke-n dari suatu barisan.

Kata Kunci:

- Barisan.
- Suku ke-n.
- Beda
- Rasio

A *Pengertian Barisan*

Pada setiap hari Senin pagi, sekolah-sekolah tingkat SD, SMP maupun SMA selalu mengadakan upacara bendera. Siswa-siswa kelas VII, VIII, dan IX secara teratur membentuk barisan tersendiri.

Pernahkah kalian mengatur barisan saat upacara bendera?



Carilah lima temanmu yang mempunyai tinggi badan berbeda-beda.

Bagaimana kamu mengatur kelima temanmu itu dalam satu barisan?

Barisan bilangan sembarang

1. Siapakah yang terletak pada urutan pertama, kedua, ketiga, keempat dan kelima?
2. Mengapa urutannya kamu buat demikian?
3. Apakah aturan pengurutan tersebut?
4. Bila bilangan-bilangan yang menunjukkan tinggi dari kelima temanmu kamu urutkan maka akan membentuk *barisan bilangan*. Bilangan-bilangan itu berkorespondensi satu-satu dengan kelima temanmu yang kamu susun menjadi satu barisan.

Tuliskan urutan tinggi temanmu.

Tinggi : , , , ,



Nama : , , , ,

1. Apakah urutan bilangan-bilangan di atas membentuk pola? Bila ya, apakah aturannya?

Ingatkah kamu bahwa bilangan-bilangan yang diurutkan dengan pola (aturan) tertentu membentuk suatu barisan bilangan. Contohnya adalah barisan bilangan ganjil dan barisan bilangan genap.

2. Bila kamu menjumpai lima temanmu (misalkan namanya diwakili oleh huruf-huruf A, B, C, D, dan E) yang tingginya masing-masing 125 cm, 130 cm, 140 cm, 100 cm dan 170 cm. Apakah bilangan-bilangan yang menunjukkan tinggi kelima temanmu tadi membentuk suatu barisan bilangan? Jelaskan.

Tinggi : 125, 130, 140, 100, 170



Nama : ...A....., ...B.....,C.....,D.....,E.....

Apakah tingginya membentuk pola?

Barisan bilangan yang dibentuk dari bilangan-bilangan yang tidak diurutkan dengan pola (aturan) tertentu disebut *barisan bilangan sembarang*.

Dalam pelajaran ini kita hanya akan mempelajari barisan-barisan yang mempunyai pola (aturan) tertentu, sedangkan untuk barisan bilangan sembarang tidak dipelajari.

Barisan aritmatika

Masih ingatkah pola bilangan genap yang dimulai dari 2?

Pola bilangan genap : 2, 4, 6, 8, ...

Barisan bilangan 2, 4, 6, 8, ... dinamakan barisan bilangan genap.

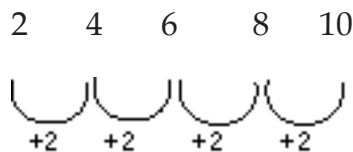
Suku ke-1 dari barisan bilangan genap itu adalah 2. Biasanya ditulis dengan lambang $U_1 = 2$.

Suku ke-2 dari barisan bilangan genap itu adalah 4. Biasanya ditulis dengan lambang $U_2 = 4$.

Suku ke-3 dari barisan bilangan genap itu adalah 6. Biasanya ditulis dengan lambang $U_3 = 6$, dan seterusnya.

Berapakah suku ke-5?

Untuk menemukan suku ke-5 dari barisan itu harus diketahui aturan urutan suku-suku pada barisan itu. Aturan pada barisan bilangan genap itu adalah *dimulai dengan 2 dan suku berikutnya diperoleh dengan menambahkan 2 pada suku sebelumnya*. Dengan demikian suku kelima adalah 10 atau $U_5 = 10$.



Barisan bilangan yang suku berikutnya didapat dari penambahan suku sebelumnya dengan bilangan yang tetap (tertentu) dinamakan *barisan aritmetika*. Bilangan yang tetap itu dinamakan *beda*.

Contoh 1

Perhatikan barisan 2, 5, 8, 11, ..., tentukan tiga suku berikutnya dari barisan tersebut.

Jawab

Perhatikan bahwa setiap suku dalam barisan tersebut memiliki beda 2, tanpa menggunakan aturan tiga suku berikutnya adalah 13, 15, 17.

Giliranmu

1. Perhatikan barisan 35, 29, 23, 17, ... Untuk menentukan bilangan pada suku berikutnya, bilangan berapakah yang harus ditambahkan? Tulislah tiga suku berikutnya. Apakah barisan itu barisan aritmatika?
2. Dapatkah kamu mencari barisan aritmatika yang lain? Berapa bedanya?

Barisan Geometri

Barisan bilangan yang suku-suku berikutnya diperoleh dari hasil kali suku sebelumnya dengan bilangan tetap yang tidak sama dengan nol dinamakan *barisan geometri*. Bilangan tetap tersebut dinamakan *pembanding (rasio)*.

Contoh 2

Tentukan rasio dari barisan berikut $1, 3, 9, 27, \dots$

Jawab

Perbandingan suku sesudah dengan suku sebelumnya menghasilkan suatu rasio yang sama yaitu 3. Dengan demikian rasio barisan adalah 3.

Cek Pemahaman

Tentukan rasio barisan berikut:

- $3, 6, 12, 24, \dots$
- $-4, 8, -16, 32, \dots$

Komunikasi

Perhatikan barisan $1, 2, 6, 24, \dots$. Apakah barisan itu barisan aritmetika, geometri atau bukan keduanya? Jelaskan.

B

Menentukan Suku ke- n Barisan Bilangan

Perhatikan pola bilangan dalam barisan $2, 4, 6, 8, \dots$. Dapatkah kamu menebak suku ke 100? Bagaimana kamu menentukan suku ke 100 tersebut?

Untuk menjawab pertanyaan tersebut marilah kita lakukan kegiatan berikut. Lengkapilah tabel sampai 10 suku pertama, untuk membantu menentukan pola yang terjadi

Urutan	Suku ke-	Bilangan Genap
1	1	$2 = 2 \times 1$
2	2	$4 = 2 \times 2$
3	3	$6 = 2 \times 3$
4	4	$8 = 2 \times 4$
5	5	$10 = 2 \times 5$
...
n	n	$\dots = \dots \times \dots$

Ya, sudah kelihatankah pola bilangan di atas? Suku ke 4, bilangannya adalah $2 \times 4 = 8$, suku ke 10 berarti $2 \times 10 = 20$, dengan demikian suku ke 100 adalah $2 \times 100 = 200$.

Akan tetapi perhatikan bahwa barisan yang disajikan di atas juga barisan aritmatika. Berapa beda barisan tersebut? Ya, bedanya adalah 2. Lantas apa hubungannya dengan pola yang telah kita temukan di atas?

Perhatikan tabel berikut untuk memperoleh kesimpulan kita

Suku ke -	Pola bilangan dengan beda 2
1	$2 = 2 + 2 \times (1-1)$
2	$4 = 2 + 2 \times (2-1)$
3	$6 = 2 + 2 \times (3-1)$
4	$8 = 2 + 2 \times (4-1)$
5	$10 = 2 + 2 \times (5-1)$
...	...
n	$\dots = \dots \times \dots$

Adakah kamu menemukan hubungan suku pertama barisan, beda, dengan suku ke n barisan?

Marilah kita rumuskan suku ke n dari barisan aritmatika sebagai berikut

<p>Suku ke -n barisan aritmatika</p>	<p>Misalkan barisan aritmetika dengan suku pertama a dan beda b. Suku ke-n (U_n) barisan tersebut adalah $U_n = a+b(n-1)$</p>
--	--

Contoh 3

Tentukan rumus suku ke-100 dari barisan 3, 7, 11, 15, ...

Jawab

Suku pertama barisan tersebut adalah 3, beda tiap suku pada barisan adalah 4. Dengan demikian suku ke - 100 adalah

$$\begin{aligned}U_{100} &= 3 + 4 \times (100 - 1) \\ &= 3 + 4 \times 99 \\ &= 399.\end{aligned}$$

Cek Pemahaman

Tentukan rumus suku ke-20 dan suku ke n dari barisan 8, 3, -2, -7, ...

Barisan Geometri

Kembali pada contoh barisan bilangan 1, 3, 9, 27, Barisan tersebut memiliki rasio 3, suku pertamanya adalah 1. Bagaimanakah kita menentukan suku ke 100, suku ke 100 dari barisan tersebut? Barisan ini adalah barisan geometri, tentu berbeda dengan barisan aritmatika yang telah dibahas di atas.

Untuk menentukan suku-suku yang diinginkan tersebut, gunakan tabel berikut untuk menemukan pola barisannya.

Suku ke -	Pola Bilangan dengan rasio 3
1	$1 = 1 \times 3^{1-1}$
2	$3 = 1 \times 3^{2-1}$
3	$9 = 1 \times 3^{3-1}$
4	$27 = 1 \times 3^{4-1}$
5	$\dots = 3^{\dots-1}$
...	...
n	$\dots = 3^{\dots-1}$

Adakah kamu menemukan hubungan suku pertama barisan, rasio, dengan suku ke n barisan?

Marilah kita rumuskan suku ke n dari barisan aritmatika sebagai berikut

Suku ke- n barisan geometri

Misalkan barisan geometri dengan suku pertama a dan rasio r . Suku ke- n (U_n) barisan tersebut adalah $U_n = ar^{(n-1)}$

Contoh 4

Tentukan suku ke 25 dari barisan $3, 6, 12, 24, \dots$

Jawab

Barisan tersebut adalah barisan geometri, suku pertama 3, rasio barisan adalah

$$\begin{aligned}U_{25} &= ar^{25-1} \\ &= 3 \times 2^{24} \\ &= 50331648\end{aligned}$$

$\frac{24}{12} = \frac{12}{6} = \frac{6}{3} = 2$. Dengan demikian suku ke 25 barisan adalah

$$\begin{aligned}U_{25} &= ar^{25-1} \\ &= 3 \times 2^{24} \\ &= 50331648\end{aligned}$$

Cek Pemahaman

Tentukan suku ke 15 dari $-4, 8, -16, 32, \dots$

Apa yang akan kamu pelajari?

- Menentukan jumlah n suku pertama pada deret Aritmetika
- Menentukan jumlah n suku pertama pada deret Geometri
- Menggunakan sifat-sifat deret aritmetika dan deret geometri.

Kata Kunci:

- Beda
- Ratio
- Jumlah n suku

Setiap minggu Dira selalu memberikan hadiah berupa kartu bergambar kepada adiknya, yaitu Reni. Minggu pertama Dira memberi Reni 3 kartu bergambar, minggu kedua Dira memberi 6 kartu bergambar kepada Reni. Minggu ketiga Dira memberi 9 kartu bergambar pada Reni.



Ingat!
Menentukan
suku ke- n pada
barisan

- Berapakah banyaknya kartu bergambar yang harus diberikan Dira kepada adiknya pada minggu ke-4?
 - Berapakah banyaknya kartu bergambar yang harus diberikan Dira kepada adiknya pada minggu ke-5?
- Berapakah banyaknya kartu bergambar yang harus diberikan Dira kepada adiknya pada minggu ke- n ?
 - Berapakah banyaknya seluruh kartu yang telah diterima Reni selama 3 minggu?
 - Bagaimanakah caramu menentukan hasil pada (d)? Jelaskan!

- Berapakah banyaknya seluruh kartu yang telah diterima Reni selama 4 minggu?
- Bagaimanakah caramu menentukan hasil pada (f)? Jelaskan!
- Nyatakan (f) dengan melibatkan (d).
- Berapakah banyaknya seluruh kartu yang telah diterima Reni selama 5 minggu?
- Bagaimanakah caramu menentukan (i)? Sebutkan!
- Nyatakan (j) dengan melibatkan (g).
- Berapakah banyaknya seluruh kartu yang telah diterima Reni selama n minggu?
- Bagaimanakah caramu menentukan (l)? Sebutkan!

Deret aritmetika dinyatakan dengan menjumlahkan suku-suku pada barisan aritmatika. Untuk menyatakan jumlah n suku yang pertama pada barisan aritmatika digunakan simbol S_n .

Barisan aritmatika

- $3, 8, 13, 18, 23, \dots$
- $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \dots$
- $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$

Deret aritmatika

- $$3 + 8 + 13 + 18 + 23 + \dots$$
- $$\dots + \dots + \dots + \dots + \dots$$
- $$\dots + \dots + \dots + \dots + \dots$$

Masih ingat barisan aritmetika naik dan turun? Coba perhatikan barisan aritmetika pada contoh a dan b termasuk barisan aritmatika naik atau turun?

Bila suku-suku pada barisan aritmetika naik dijumlahkan maka akan terbentuk *deret aritmatika naik*, begitu pula bila suku-suku pada barisan aritmetika turun dijumlahkan maka akan terbentuk *deret aritmatika turun*.

Komunikasi

Bagaimanakah nilai dari deret aritmatika naik? Jelaskan!
 Bagaimanakah nilai dari deret aritmatika turun? Jelaskan!

Berikut ini salah satu cara untuk mencari hubungan antara S_n dan U_n pada deret aritmatika.

$$\begin{aligned}
 U_1 &= a_1 = 3, \quad U_2 = a_1 + 3 = 6, \quad U_3 = a_1 + 6 = 9 \\
 S_3 &= 3 + 6 + 9 \\
 S_3 &= \frac{9 + 6 + 3}{+} \\
 2S_3 &= \frac{12 + 12 + 12}{=} \\
 &= 3+9 + 3+9 + 3+9 \\
 &= (a_1+U_3) + (a_1+U_3) + (a_1+U_3) \\
 2S_3 &= 3(a_1+U_3) \\
 &= \frac{3(a_1+U_3)}{2} \\
 S_3 &= \frac{3(a_1+U_3)}{2}
 \end{aligned}$$

← Urutan penulisan S_3

$$\begin{aligned}
 U_4 &= a_1 + 9 = 12 \\
 S_4 &= 3 + 6 + 9 + 12 \\
 S_4 &= \frac{12 + 9 + 6 + 3}{+} \\
 2S_4 &= 15 + 15 + 15 + 15 \\
 &= 3+12 + 3+12 + 3+12 + 3+12 \\
 &= (a_1+U_4) + (a_1+U_4) + (a_1+U_4) + (a_1+U_4) \\
 2S_4 &= 4(a_1+U_4) \\
 S_4 &= \frac{4(a_1+U_4)}{2}
 \end{aligned}$$

← Urutan penulisan S_4 dibalik

$$\begin{aligned}
 S_n &= a_1 + (a_1 + b) + (a_1 + 2b) + \dots + (U_n - 2b) + (U_n - b) + U_n \\
 + \\
 S_n &= U_n + (U_n - b) + (U_n - 2b) + \dots + (a_1 + 2b) + (a_1 + b) + a_1 + \\
 \hline
 2S_n &= (a_1 + U_n) + (a_1 + U_n) + (a_1 + U_n) + \dots + (a_1 + U_n) \\
 &= \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{suku}} \\
 &= n(a_1 + U_n)
 \end{aligned}$$

Sehingga rumus jumlah n suku yang pertama pada deret aritmetika adalah:

Jumlah n suku pertama deret Aritmetika	$S_n = \frac{n(a + u_n)}{2}$
	a : suku pertama, U_n : suku ke n S_n : jumlah n suku pertama, n : banyak suku

Cek Pemahaman

Geometri

Dhani mempunyai mainan bongkar pasang dari bangun-bangun yang berbentuk segilima beraturan dengan panjang sisinya 1 cm. Susunlah segilima-segilima beraturan seperti pada gambar di samping, kemudian lengkapi tabel berikut.



Banyak bangun	Keliling	Suku Ke- n (U_n)	Jumlah keliling	Jumlah n suku pertama (S_n)
1	5	U_1	$5 = 5$	$S_1 = 5$
2	8	U_2	$5 + 8 = 13$	$S_2 = 13$
3	$5 + 8 + \dots = \dots$	$S_3 = \dots$
4	$5 + 8 + \dots + \dots = \dots$	$S_4 = \dots$
5	$5 + 8 + \dots + \dots + \dots = \dots$	$S_5 = \dots$
.	.	.		
.	.	.		
.	.	.		
n	$5 + 8 + \dots + \dots + \dots = \dots$	$S_n = \dots$

Kita sudah membahas jumlah deret aritmatika, bagaimana menentukan jumlah deret geometri? Ide mencari jumlah deret aritmatika kita gunakan untuk mencari jumlah deret geometri, akan tetapi dengan modifikasi.

Ingat suku ke - n barisan geometri adalah

$$U_n = ar^{n-1}$$

bagaimana bila suku ini kita kalikan dengan rasionya?

$$\begin{aligned} rU_n &= r \times ar^{n-1} \\ &= ar^n \end{aligned}$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} &= U_{n+1} \\ U_{n+1} - rU_n &= 0 \end{aligned}$$

Sifat ini kita manfaatkan untuk mencari jumlah deret geometri sebagai berikut

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ rS_n &= ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \end{aligned}$$

$$S_n - rS_n = a + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - ar^n$$

Hasil terakhir menunjukkan

$$S_n(1 - r) = a - ar^n$$

Sehingga diperoleh:

Jumlah n suku pertama deret Geometri	$S_n = \frac{a - ar^{n-1}}{(1 - r)} = \frac{a(1 - r^{n-1})}{1 - r}$
	<p>a : suku pertama, r : rasio S_n : jumlah n suku pertama, n : banyak suku</p>

Penalaran

Syarat apa yang harus diberikan pada rumus di atas?

Contoh 1

Diketahui deret berikut.

$$3 + 6 + 12 + 24 + \dots$$

- Tentukan suku ke delapan pada deret tersebut!
- Tentukan jumlah delapan suku yang pertama pada deret tersebut!

Jawab

Suku pertama deret tersebut adalah $a=3$, sedangkan rasio barisan adalah $r = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = 2$. Dengan demikian suku ke delapan deret tersebut adalah

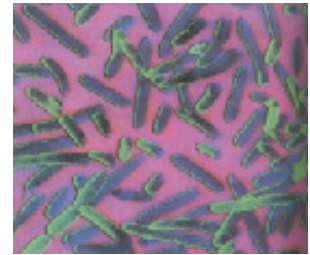
$$\begin{aligned} U_8 &= ar^{8-1} \\ &= 3 \times 2^7 \\ &= 3 \times 128 \\ &= 384. \end{aligned}$$

Sedangkan jumlah delapan suku pertama deret tersebut adalah

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{a - ar^{8-1}}{1 - r} \\ &= \frac{3 - 324}{1 - 2} \\ &= \frac{-321}{-1} \\ &= 321. \end{aligned}$$

Cek Pemahaman

1. Banyaknya bakteri berlipat ganda setiap 30 menit. Jika banyaknya bakteri adalah 150, hitung banyaknya bakteri yang akan tumbuh setelah 12 jam dan setelah 24 jam.
2. Pak Abi membeli mobil baru seharga Rp135.000.000,00. Ia memperkirakan harga jual mobil akan turun 18% dari harga beli untuk tiap tahunnya.



sumber: www.medicasto.com

Tentukan harga jual mobil Pak Abi, jika ia merencanakan menjual mobil tersebut setelah memakai 5 tahun!

Refleksi

Renungkan pertanyaan-pertanyaan berikut, untuk mengukur pemahaman kamu.

1. Apakah setiap barisan bilangan senantiasa memiliki pola?
2. Pada barisan aritmatika dengan beda negatif, mana yang lebih besar suku pertama atau suku ke - n ?
3. Pada barisan geometri dengan rasio lebih besar dari 1, mana yang lebih besar suku pertama atau suku ke - n ?
4. Adakah materi yang masih sulit untukmu? Beranikan untuk bertanya pada guru atau temanmu


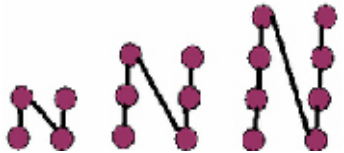
Rangkuman

1. Barisan bilangan yang berpola secara aritmatika disebut barisan aritmatika.
2. Barisan aritmatika bergantung pada suku pertama dan beda antar suku. Suku ke - n barisan aritmatika dinyatakan oleh $U_n = a + b(n-1)$, dengan a suku pertama dan b beda.
3. Barisan bilangan yang berpola secara geometri disebut barisan geometri.

4. Barisan geometri bergantung pada suku pertama dan rasio antar suku. Suku ke - n barisan geometri adalah $U_n = ar^{n-1}$, dengan a suku pertama dan r rasio.
5. Deret adalah jumlahan suku-suku barisan. Bila yang dijumlahkan suku-suku barisan aritmatika, maka disebut deret aritmatika dan bila yang dijumlahkan suku-suku barisan geometri maka disebut deret geometri.

Evaluasi Mandiri

Pilihlah jawaban yang paling benar dengan memeri tanda silang (X) pada pilihan yang diberikan.

1. Banyak biskuit pada pola di samping menggambarkan barisan 1, 3, 6, ...
Berapa banyak biskuit pada pola ke enam adalah buah
 
 - a. 52
 - b. 36
 - c. 30
 - d. 21
2. Banyak titik pada huruf N pada urutan ke - 8 adalah ..
 
 - a. 24
 - b. 22
 - c. 18
 - d. 19
3. Suku keenam dan ketujuh dari barisan Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8,... adalah
 - a. 8 dan 11
 - b. 8 dan 13
 - c. 9 dan 13
 - d. 9 dan 11
4. Suku ke - n dari barisan 3, 5, 7, 9 ... adalah
 - a. $n + 2$
 - b. $2n - 1$
 - c. $2n + 1$
 - d. $2n + 3$
5. Jika diketahui $8 + 17 + 26 + \dots = 690$. Banyaknya bilangan dari deret tersebut adalah
 - a. 10
 - b. 12
 - c. 11
 - d. 13

Jawablah soal berikut dengan benar.

6. Rumah-rumah di sebelah kanan Jalan Ahmad Yani diberi nomor genap dari 2 sampai dengan 224. Berapa banyak rumah yang ada di sebelah kanan Jalan Ahmad Yani?
7. Tulislah aturan setiap barisan aritmetika berikut dan carilah tiga suku berikutnya.
 - a. 5, 10, 15, 20, ...
 - b. 3, 7, 11, 15, ...
 - c. 34, 29, 24, 19, ...
 - d. 25, 21, 17, 13, ...
 - e. 63, 54, 45, 36, ...
 - f. -8, -1, 6, 13, ...
3. Seorang Pegawai menerima gaji pertama sebesar Rp 800.000,00. Setiap bulan gaji tersebut naik sebesar Rp 100.000,00 sampai setahun. Bila gaji yang diterima pegawai itu ditulis dalam bentuk barisan, barisan apakah itu? Tulislah aturan untuk menjelaskan barisan itu.
9. **Berpikir kritis.** Apakah susunan 33, 33, 33, 33, merupakan barisan bilangan? Termasuk barisan aritmetika atau geometri? Tulislah aturan untuk menjelaskannya.