

## 7-3 ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Όταν ένα βαγόνι τραίνου συγκρούεται με ένα προφυλακτήρα προσκρούσεως με ελατήριο στο τέλος της σιδηροτροχιάς, το ελατήριο συμπιέζεται καθώς το βαγόνι έρχεται σε στάση. Αν δεν υπάρχει τριβή, το ελατήριο εκτείνεται πάλι προς τα πίσω και το βαγόνι κυλά προς την αντίθετη κατεύθυνση. Κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης με το ελατήριο, η κινητική ενέργεια του βαγονιού έχει «αποθηκευτεί» στην ελαστική παραμόρφωση του ελατηρίου. Κάτι πολύ παρόμοιο συμβαίνει στο ελατηριοφόρο όπλο. Έργο παράγεται επί του ελατηρίου από τη δύναμη που το συμπιέζει· το έργο αυτό αποθηκεύεται στο ελατήριο ώσπου να τραβήξετε τη σκανδάλη οπότε το ελατήριο δίνει κινητική ενέργεια στο βλήμα.

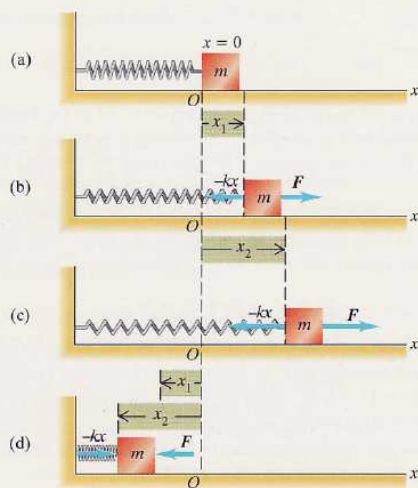
Αυτό είναι το ίδιο πρότυπο που είδαμε με τον πασσαλοπήκτη. Παράγεται έργο επί του συστήματος με σκοπό την αποθήκευση ενέργειας· τότε η ενέργεια αυτή μπορεί αργότερα να μετατραπεί σε κινητική ενέργεια. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την έννοια της ελαστικής δυναμικής ενέργειας σε αυτή τη διαδικασία αποθήκευσης. Προχωρούμε ακριβώς όπως κάναμε για τη βαρυτική δυναμική ενέργεια. Αρχίζουμε με το έργο που παράγεται από τη δύναμη του ελατηρίου και έπειτα το συνδυάζουμε με το θεώρημα έργου-ενέργειας.

Στο Εδάφιο 6-3 εξετάσαμε το έργο που συνδέεται με την έκταση ή τη συμπίεση ενός ελατηρίου. Στο Σχήμα 7-12 φαίνεται το ελατήριο του Σχ. 6-8 με το αριστερό του άκρο στηριγμένο σε σταθερό σημείο και το δεξιό του άκρο συνδεδεμένο με ένα σώμα μάζας  $m$  που μπορεί να κινείται κατά μήκος του άξονα  $x$ . Το σώμα είναι στη θέση  $x = 0$  όταν το ελατήριο δεν είναι ούτε τεταμένο ούτε συμπιεσμένο (Σχ. 7-12a). Μια εξωτερική δύναμη  $F$  ασκείται στη μάζα εξωθώντας το σε μετατόπιση (Σχ. 7-12b). Πόσο έργο παράγει η δύναμη του ελατηρίου επί του σώματος;

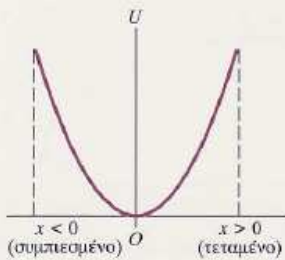
Βρήκαμε στο Εδάφιο 6-3 ότι το έργο που πρέπει να παραγάγουμε επί του ελατηρίου για να το εκτείνουμε από μια επιμήκυνση  $x_1$  σε μια μεγαλύτερη επιμήκυνση  $x_2$  είναι  $\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$ , όπου  $k$  είναι η σταθερά του ελατηρίου. Τώρα χρειάζεται να βρούμε το έργο που παράγεται από το ελατήριο επί του σώματος. Από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα οι δύο ποσότητες έργου είναι ακριβώς η μία η αρνητική της άλλης. Αλλάζοντας τα πρόσημα στην έκφραση της Εξ. (6-7), βρίσκουμε ότι σε μια μετατόπιση από το  $x_1$  ως το  $x_2$  το ελατήριο παράγει μια ποσότητα έργου  $W_{el}$  που δίνεται από την

$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2.$$

όταν ο δείκτης “el” αντιπροσωπεύει την (Αγγλική) λέξη *elastic* (= ελαστικός). Όταν το  $x_2$  είναι μεγαλύτερο από το  $x_1$  (Σχ. 7-12c), η ποσότητα αυτή είναι αρνητική, γιατί το σώμα κινείται στην κατεύθυνση  $+x$  ενώ το ελατήριο το έλκει προς την κατεύθυνση  $-x$ . Αν το ελατήριο μπορεί είτε να συμπιεστεί, είτε να εκταθεί, το  $x_1$  και το  $x_2$  μπορούν να πάρουν



7-12 (a) Ένα σώμα συνδεδεμένο με ένα ελατήριο σε ισορροπία ( $x = 0$ ) πάνω σε οριζόντια επιφάνεια. (b) Μια ασκούμενη δύναμη  $F$  προς τα δεξιά προκαλεί μια επιμήκυνση (θετικό  $x_1$ ) του ελατηρίου. (c) Επιπλέον δύναμη, ασκούμενη προς τα δεξιά, προκαλεί μεγαλύτερη επιμήκυνση του ελατηρίου ( $x_2 > x_1$ ) και θετικό έργο. (d) Μια ασκούμενη δύναμη προς τα αριστερά προκαλεί συμπίεση ( $x_2 < x_1$ ) του ελατηρίου, αλλά το έργο εξακολουθεί να είναι θετικό.



**7-13** Η καμπύλη δυναμικής ενέργειας για ένα ιδανικό ελατήριο είναι μια παραβολή,  $U = \frac{1}{2}kx^2$ , όπου  $x$  είναι η μεταβολή του μήκους του ελατηρίου. Το  $x$  είναι θετικό στην έκταση, και αρνητικό στη συμπίεση (όπου η συμπίεση είναι δυνατή): όμως η  $U$  δεν είναι ποτέ αρνητική.

αρνητικές τιμές –το ένα από τα δύο ή και τα δύο ταυτόχρονα–, Σχ. 7-12d, και η έκφραση για το  $W_{el}$  εξακολουθεί να ισχύει.

Ακολουθώντας την διαδικασία που ακολουθήσαμε για το βαρυτικό έργο, ορίζουμε την **ελαστική δυναμική ενέργεια** ως

$$U = \frac{1}{2}kx^2. \quad (7-9)$$

Το Σχήμα 7-13 είναι μια γραφική παράσταση της Εξ. (7-9). Η μονάδα του  $k$  είναι N/m, άρα η μονάδα του  $U$  είναι  $N \cdot m$ . Ορίσαμε το  $1 N \cdot m$  να είναι  $1 J$ , η μονάδα που χρησιμοποιείται για όλες τις ποσότητες έργου και ενέργειας.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. (7-9) για να εκφράσουμε το έργο  $W_{el}$  που παράγεται στο σώμα από τη δύναμη του ελατηρίου συναρτήσει της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας:

$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = U_1 - U_2 = -\Delta U. \quad (7-10)$$

Όταν το  $x$  αυξάνεται, το  $W_{el}$  είναι *αρνητικό* και το  $U$  *αυξάνεται*: όταν το  $x$  μειώνεται, το  $W_{el}$  είναι *θετικό* και το  $U$  *μειώνεται*. Αν το ελατήριο μπορεί και να συμπίεστεί και να εκταθεί, τότε το  $x$  είναι αρνητικό στη συμπίεση. Όμως, όπως δείχνει το Σχ. 7-13, το  $U$  είναι θετικό τόσο για θετικό  $x$  όσο και για αρνητικό  $x$ , και οι Εξ. (7-9) και (7-10) ισχύουν και στις δύο περιπτώσεις. Αν  $x = 0$ , τότε  $U = 0$  και το ελατήριο δεν έχει υποστεί ούτε έκταση ούτε συμπίεση.

Το θεώρημα έργου-ενέργειας βεβαιώνει ότι  $W_{tot} = K_2 - K_1$ , και αυτό ισχύει για κάθε ασκούμενη δύναμη. Αν η δύναμη του ελατηρίου είναι η μόνη δύναμη που παράγει έργο επί του σώματος, τότε

$$W_{tot} = W_{el} = U_1 - U_2.$$

Το θεώρημα έργου-ενέργειας μας δίνει επομένως

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \quad (7-11)$$

και

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2. \quad (7-12)$$

Στην περίπτωση αυτή η ολική ενέργεια  $E = K + U$  *διατηρείται*.

Αν και άλλες δυνάμεις παράγουν έργο στο σώμα, καλούμε το έργο τους  $W_{other}$ , όπως προηγουμένως. Τώρα το ολικό έργο είναι  $W_{tot} = W_{el} + W_{other}$  και το θεώρημα έργου-ενέργειας δίνει

$$W_{el} + W_{other} = K_2 - K_1.$$

Το έργο που παράγεται από το ελατήριο είναι και στην περίπτωση αυτή  $W_{el} = U_1 - U_2$ , άρα πάλι

$$K_1 + U_1 + W_{other} = K_2 + U_2 \quad (7-13)$$

και

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + W_{other} = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2. \quad (7-14)$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι το έργο που παράγεται από όλες τις δυνάμεις εκτός από την **ελαστική δύναμη** ισούται με τη μεταβολή της ολικής μηχανικής ενέργειας  $E = K + U$  του σώματος. Αν το  $W_{other}$  είναι θετικό, η  $E$  αυξάνεται· αν το  $W_{other}$  είναι αρνητικό, η  $E$  μειώνεται.

Τι συμβαίνει όταν έχουμε και βαρυτικές και ελαστικές δυνάμεις, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση ενός σώματος που κρέμεται στο άκρο ενός ελατηρίου μέσα σε ένα βαρυτικό πεδίο; Μπορούμε και τώρα να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1 + W_{other},$$

τώρα όμως τα  $U_1$  και  $U_2$  είναι οι αρχικές και οι τελικές τιμές της **συνολικής** δυναμικής ενέργειας, που συμπεριλαμβάνει τόσο τη βαρυτική, όσο και την ελαστική δυναμική ενέργεια. Δηλαδή ισχύει  $U = U_{grav} + U_{el}$ . Αν η βαρυτική και η ελαστική δύναμη είναι οι *μόνες* δυνάμεις που παράγουν έργο επί του σώματος, τότε  $W_{other} = 0$ . Το Σχήμα 7-14 παρουσιάζει ένα οικείο παράδειγμα μετασχηματισμών μεταξύ ελαστικής δυναμικής ενέργειας, κινητικής ενέργειας και βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.