

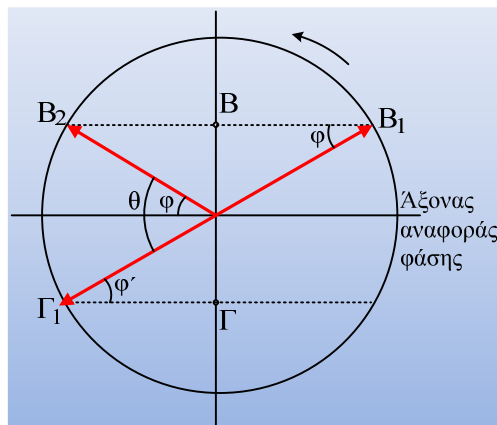
Άσκηση:

Ένα σώμα εκτελεί ΑΑΤ με περίοδο $T=12s$ και τη στιγμή $t=0$ περνά από τη θέση $x=+A/2$ κατευθυνόμενο προς τη θέση ισοροπίας. Ποια χρονική στιγμή περνά από τη θέση $x=-A/2$;

Λύση:

Θα χρησιμοποιήσω περιστρεφόμενα και ας μην υπάρχουν στο βιβλίο.

Παίρνουμε τον κύκλο αναφοράς της ταλάντωσης. Αρχικά το σώμα βρίσκεται στην θέση Β σε απομάκρυνση $x=A/2$ και θα φτάσει στη θέση Γ με $x=-A/2$. Οπότε το περιστρεφόμενο διάνυσμα θα βρίσκεται στην θέση Β₂, αφού πλησιάζει στην Θ.Ι. Αν έπαιρνα τη θέση Β₁ καθώς στρέφεται, η απομάκρυνση θα μεγάλωνε. Αλλά η γωνία φ είναι ίση με 30° , αφού η απέναντι κάθετος είναι ίση με το μισό της υποτεινουσας και το ίδιο για την γωνία φ' , συνεπώς το περιστρεφόμενο διάνυσμα διαγράφει



$$\text{γωνία } \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Έτσι το σώμα φτάνει στη θέση $x=-A/2$ τη στιγμή

$$t_1 = \frac{\theta}{\omega} = \frac{\theta}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{\theta}{2\pi} T = \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} 12s = 2s$$

Σωστό πρέπει να είναι, αλλά ας δοκιμάσω και με την Τριγωνομετρία, αν και δεν την «χωνεύω», να δούμε αν τα καταφέρω...

Η εξίσωση της απομάκρυνσης έχει τη μορφή

$$x=A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$$

Τη στιγμή $t=0$, $x=A/2$ και με αντικατάσταση παίρνουμε:

$\eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2}$, οπότε η γωνία $\varphi_0=30^\circ$. Να βάλω στην εξίσωση αυτήν την τιμή της φ_0 ή πρέπει να ψάξω για άλλη;

Ναι, αλλά ποια είναι η γενική λύση της εξίσωσης;

Ωχ δεν την θυμάμαι. Φτού!! Τώρα;

Κάτσε, ψυχραιμία. Ας δοκιμάσω με τον Τριγωνομετρικό κύκλο.

Το $\eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2}$ το εμφανίζουν δύο παραπληρωματικές γωνίες φ_1 και φ_2 .

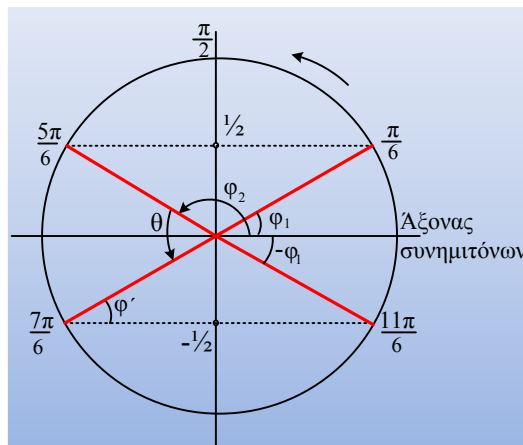
Ποια από τις δυο να πάρω; A!!! θυμήθηκα.

Παίρνουμε την εξίσωση της ταχύτητας:

$$v=v_{\max}\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_0)$$

Θέτοντας $t=0$ παίρνουμε:

$$v=v_{\max}\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi/6)>0 \text{ και}$$



$$v=v_{\max}\cdot\sigma\upsilon\nu(5\pi/6)<0$$

Στην περίπτωση μας το σώμα κινείται προς την θέση ισορροπίας και η ταχύτητα είναι αρνητική, συνεπώς η δεύτερη λύση μας κάνει!

Το βρήκα λοιπόν, η αρχική φάση είναι ίση με $5\pi/6$!

Πάμε τώρα να βρούμε το χρόνο:

Αντικαθιστούμε στην (1) $x=-A/2$ και παίρνουμε:

$$-A/2=A\cdot\eta\mu(\omega t+5\pi/6)\rightarrow\eta\mu(\omega t+5\pi/6)=-1/2\rightarrow\omega t+5\pi/6=-\pi/6$$

Ωχ!!! πάλι τα ίδια... Ας ξαναδώ τον Τριγωνομετρικό κύκλο.

Ημίτονο $-1/2$ έχουν πάλι δύο γωνίες παραπληρωματικές η $-\pi/6$ και η $...$ Ώπα δικέ μου, είπαμε θετικές γωνίες παίρνουμε, όχι αρνητικές (αλήθεια γιατί; δεν θυμάμαι, αλλά το ρωτάω άλλη ώρα ...) συνεπώς έχουμε τις γωνίες $\pi+\pi/6=7\pi/6$ και $2\pi-\pi/6=11\pi/6$. Ωραία, ξαναπάμε στην εξίσωση:

$$\omega t+5\pi/6=7\pi/6\rightarrow\frac{2\pi}{12}t+\frac{5\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}\rightarrow t=2s$$

ή

$$\omega t+5\pi/6=11\pi/6\rightarrow\frac{2\pi}{12}t+\frac{5\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}\rightarrow t=6s$$

προφανώς μας ενδιαφέρει η πρώτη φορά, συνεπώς η ζητούμενη στιγμή είναι $t=2s$!!!

Το βρήκα!!!

Και για την αντιγραφή:

dmargaris@sch.gr