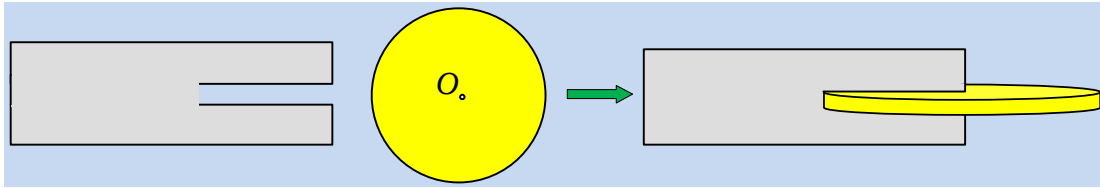
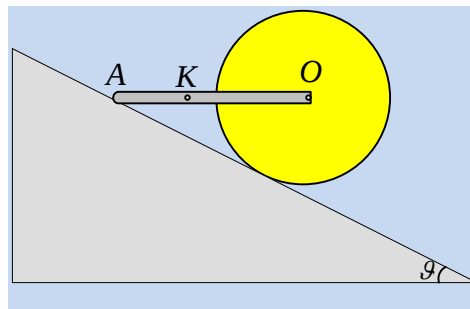


Ένας «οδοστρωτήρας» σε κεκλιμένο επίπεδο.

Διαθέτουμε ένα ομογενή κύλινδρο μάζας $m=20\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,5\text{m}$, τον οποίο προσαρμόζουμε σε ένα δοκάρι, μάζας $M=40\text{kg}$ και μήκους $\ell=1\text{m}$, στο οποίο έχουμε δημιουργήσει μια εγκοπή, όπως στο σχήμα:



Έτσι κατασκευάζουμε έναν «οδοστρωτήρα» τον οποίο τοποθετούμε σε ένα κεκλιμένο επίπεδο, με γωνία κλίσεως θ .



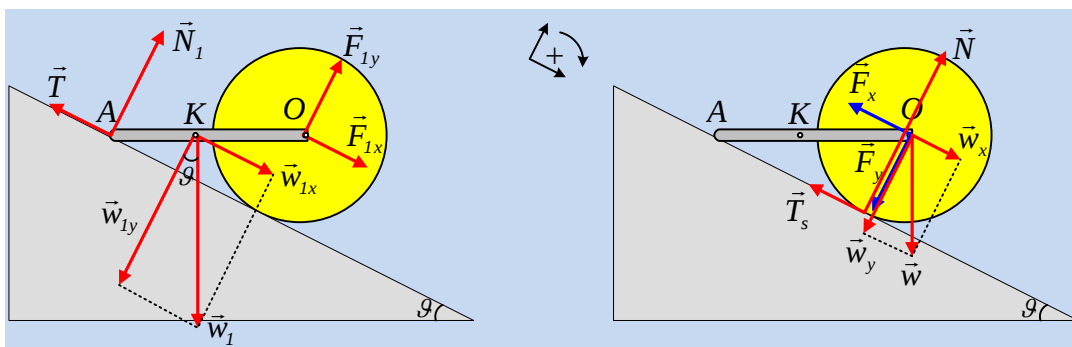
Το κέντρο μάζας K της δοκού απέχει από το άκρο A απόσταση $(AK)=0,3\text{m}$. Αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα, το οποίο αρχίζει να κινείται προς τα κάτω με τον κύλινδρο να κυλιέται και να διανύει απόσταση 2m σε χρονικό διάστημα 2s .

Δίνονται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = \frac{1}{2} mR^2$, ενώ $\eta\mu\theta=0,45$, $\sigma\upsilon\nu\theta=0,9$ και $g=10\text{m/s}^2$.

- Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου, καθώς και την γωνιακή του επιτάχυνση.
- Να υπολογίσετε την τριβή που θα ασκηθεί στη δοκό, στο άκρο της A .
- Να βρεθεί η δύναμη που δέχεται η δοκός από τον άξονα του κυλίνδρου στο άκρο της O .
- Ποιο στερεό, ο κύλινδρος ή η δοκός συνεισφέρει περισσότερο στο «στρώσιμο» του δρόμου;

Απάντηση:

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο δοκάρι και στον κύλινδρο.



Όπου F_{1x} και F_{1y} οι συνιστώσες της δύναμης που ασκεί ο άξονας του κυλίνδρου στη δοκό, η πρώτη παράλληλη στο επίπεδο και η δεύτερη κάθετη σε αυτό. Οι αντίστοιχες συνιστώσες στον κύλινδρο είναι η F_x και F_y .

Οι παραπάνω δυνάμεις μεταξύ δοκού-κυλίνδρου είναι εσωτερικές για το σύστημα (δράση-αντίδραση) συνεπώς το σύστημα κινείται με την επίδραση των εξωτερικών δυνάμεων.

Η κίνηση του συστήματος λοιπόν περιγράφεται από τους νόμους του Νεύτωνα:

$$\text{Μεταφορική κίνηση:} \quad \Sigma F_x = (M+m) \cdot a_{cm} \rightarrow mg \cdot \eta \mu \theta + Mg \cdot \eta \mu \theta - T_s - T = (M+m) \cdot a_{cm} \quad (1)$$

$$\text{Στροφική κίνηση κυλίνδρου:} \quad \Sigma \tau_O = I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_s \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

Όμως κατά τη μεταφορική κίνηση όλα τα σημεία και της δοκού και του κυλίνδρου έχουν την ίδια ταχύτητα και την ίδια επιτάχυνση. Συνεπώς και ο άξονας του κυλίνδρου έχει επιτάχυνση παράλληλη με το επίπεδο με μέτρο a_{cm} και αφού ο κύλινδρος κυλίνεται $a_O = a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot r$, οπότε με αντικατάσταση στην (2) και στη συνέχεια με πρόσθεση κατά μέλη θα πάρουμε:

$$mg \cdot \eta \mu \theta + Mg \cdot \eta \mu \theta - T = (M+m) \cdot a_{cm} + \frac{1}{2} m \cdot a_{cm} \rightarrow$$

$$a_{cm} = \frac{(M+m)g \cdot \eta \mu \theta - T}{M + 1,5m} \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) μας λέει ότι η επιτάχυνση με την οποία ο «οδοστρωτήρας» μας κινείται κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου είναι σταθερή, συνεπώς η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, οπότε:

$$\text{i) Η μετατόπιση του συστήματος δίνεται από την εξίσωση } x = \frac{1}{2} a_{cm} \cdot t^2 \rightarrow$$

$$a_{cm} = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \cdot 2m}{2^2 s^2} = 1 m/s^2$$

$$\text{Και αφού ο κύλινδρος κυλίνεται } \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{1}{0,5} rad/s^2 = 2 rad/s^2.$$

$$\text{ii) Επιστρέφοντας τώρα στη σχέση (3) και λύνοντας ως προς } T \text{ παίρνουμε:}$$

$$T = mg \cdot \eta \mu \theta + Mg \cdot \eta \mu \theta - (M + 1,5m) \cdot a_{cm} \rightarrow$$

$$T = 20 \cdot 10 \cdot 0,45 N + 40 \cdot 10 \cdot 0,45 - (40 + 1,5 \cdot 20) \cdot 1 N = 200 N$$

iii) Κατά την προς τα κάτω κίνηση του «οδοστρωτήρα» μας, η δοκός εκτελεί μεταφορική κίνηση χωρίς να περιστρέφεται. Αν υπολογίσουμε τη γωνία που σχηματίζει η δοκός με το κεκλιμένο επίπεδο, βρίσκουμε:

$$\varepsilon \phi \phi = \frac{R}{\ell} = \frac{0,5m}{1m} = 0,5 = \frac{\eta \mu \theta}{\sigma \upsilon \nu \theta} = \varepsilon \phi \theta$$

Δηλαδή η δοκός παραμένει οριζόντια κατά την κίνηση του συστήματος.

Η κίνηση της δοκού περιγράφεται με βάση τους νόμους του Νεύτωνα:

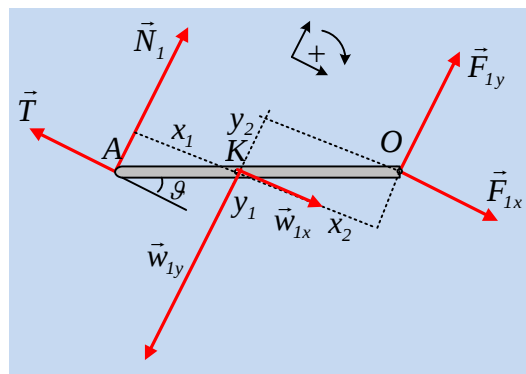
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_1 + F_{1y} - Mg \cdot \sigma \upsilon \nu \theta = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = M \cdot a_{cm} \rightarrow F_{1x} + Mg \cdot \eta \mu \theta - T = M \cdot a \quad (2)$$

$$\Sigma \tau_K = 0 \rightarrow N_1 \cdot x_1 + T \cdot y_1 - F_{1y} \cdot x_2 + F_{1x} \cdot y_2 = 0 \quad (3)$$

Αλλά από την εξίσωση (2) παίρνουμε:

$$F_{1x} = M \cdot a - Mg \cdot \eta \mu \theta + T = 40 \cdot 1 N - 40 \cdot 10 \cdot 0,45 N + 200 N = 60 N$$



Ενώ με βάση την τριγωνομετρία η (3) γράφεται:

$$N_1 \cdot (AK) \cdot \sin\theta + T \cdot (AK) \cdot \eta\mu\theta - F_{1y} \cdot (OK) \cdot \sin\theta + F_{1x} \cdot (OK) \cdot \eta\mu\theta = 0 \rightarrow$$

$$N_1 \cdot 0,3 \cdot 0,9 + T \cdot 0,3 \cdot 0,45 - F_{1y} \cdot 0,7 \cdot 0,9 + F_{1x} \cdot 0,7 \cdot 0,45 = 0 \rightarrow$$

$$0,63 \cdot F_{1y} - 0,27 N_1 = 45,9 \quad (3^a)$$

Οπότε τώρα οι εξισώσεις (1) και (3a) αποτελούν σύστημα και με αντικατάσταση έχουμε:

$$F_{1y} + N_1 = 360 \quad (1^a) \quad \text{και}$$

$$0,63 \cdot F_{1y} - 0,27 N_1 = 45,9 \quad (3^a)$$

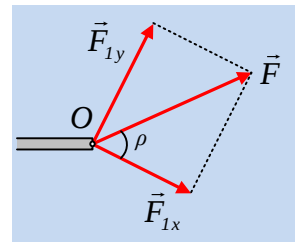
Από όπου βρίσκουμε $N_1 = 303\text{N}$ και $F_{1y} = 57\text{N}$.

Αλλά τότε η δύναμη F που δέχεται η δοκός από τον κύλινδρο έχει μέτρο:

$$F = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} = \sqrt{60^2 + 57^2} \text{ N} = 82,8\text{N}$$

Ενώ σχηματίζει με το κεκλιμένο επίπεδο γωνία ρ με:

$$\varepsilon\phi\rho = \frac{F_{1y}}{F_{1x}} = \frac{57}{60} = 0,95$$



iv) Από την ισορροπία του κυλίνδρου στην διεύθυνση την κάθετη στο επίπεδο παίρνουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow$$

$$N = mg \cdot \sin\theta + F_y = 20 \cdot 10 \cdot 0,9 + 57\text{N} = 237\text{N}.$$

Συνεπώς ο κύλινδρος πιέζει το κεκλιμένο επίπεδο με δύναμη $N' = 237\text{N}$, ενώ η δοκός με δύναμη $N_1' = 303\text{N}$.

Συνεπώς περισσότερο «βοηθάει» στο στρώσιμο η δοκός, παρά ο κύλινδρος!!!

dmargaris@sch.gr