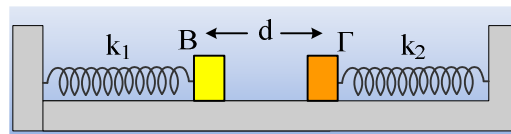


Ποιος κάνει λάθος, αλλά και τι να κάνουμε;



Τα σώμα B και Γ με μάζες $m_1=0,1\text{kg}$ και $m_2=2m_1=0,2\text{kg}$ ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένα στα άκρα οριζόντιων ελατηρίων με σταθερές $k_1=30\text{N/m}$ και $k_2=2k_1=60\text{N/m}$ αντίστοιχα, όπως στο σχήμα, όπου οι άξονες των δύο ελατηρίων συμπίπτουν. Τα σώματα που θεωρούνται υλικά σημεία, αμελητέων διαστάσεων απέχουν κατά $d=0,3\text{m}$. Ασκώντας κατάλληλες δυνάμεις στα σώματα, συσπειρώνουμε κάθε ελατήριο κατά $0,3\text{m}$ και αφήνουμε ταυτόχρονα τα σώματα να εκτελέσουν ΑΑΤ. Μετά από λίγο τα σώματα συγκρούονται πλαστικά, οπότε το συσσωμάτωμα εκτελεί μια νέα ΑΑΤ με σταθερά $D=k_1+k_2$. Ζητούνται:

- Η ενέργεια ταλάντωσης κάθε σώματος πριν την κρούση.
- Η ενέργεια ταλάντωσης του συσσωματώματος.
- Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας (η ενέργεια που εμφανίζεται ως αύξηση της θερμικής ενέργειας των σωμάτων, συν ενέργεια μόνιμης παραμόρφωσης των σωμάτων, συν ενέργεια ήχου...), που οφείλεται στην κρούση.

Απάντηση:

- i) Το κάθε σώμα θα εκτελέσει ταλάντωση με πλάτος $A=0,3\text{m}$, συνεπώς με ενέργειες ταλάντωσης:

$$E_1 = \frac{1}{2} D_1 A^2 = \frac{1}{2} k_1 A^2 = \frac{1}{2} 30 \cdot 0,3^2 \text{ J} = 1,35 \text{ J} \text{ και}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} D_2 A^2 = \frac{1}{2} k_2 A^2 = \frac{1}{2} 60 \cdot 0,3^2 \text{ J} = 2,7 \text{ J}$$

- ii) Οι δυο ταλαντώσεις πραγματοποιούνται με την ίδια περίοδο $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{2m_1}{2k_1}}$ συνεπώς θα

περάσουν ταυτόχρονα από τις θέσεις ισορροπίας και θα συγκρουσθούν, αφού επιμηκύνουν εξίσου τα δυο ελατήρια, στο μέσον της αρχικής απόστασης, σε απόσταση $x=0,15\text{m}$ από τις θέσεις ισορροπίας κάθε ταλάντωσης. Εφαρμόζοντας την διατήρηση της ενέργειας ταλάντωσης για κάθε σώμα παίρνουμε (θετική η προς τα δεξιά κατεύθυνση):

$$E_1 = K_1 + U_1 \rightarrow \frac{1}{2} k_1 A^2 = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \rightarrow$$

$$v_1 = + \sqrt{\frac{k_1}{m_1} (A^2 - x_1^2)} = + \sqrt{\frac{30}{0,1} (0,3^2 - 0,15^2)} \text{ m/s} = 4,5 \text{ m/s}$$

$$E_2 = K_2 + U_2 \rightarrow \frac{1}{2} k_2 A^2 = \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \rightarrow$$

$$v_2 = - \sqrt{\frac{k_2}{m_2} (A^2 - x_2^2)} = - \sqrt{\frac{600}{2} (0,3^2 - 0,15^2)} \text{ m/s} = -4,5 \text{ m/s}$$

Εφαρμόζοντας την διατήρηση της ορμής για την κρούση παίρνουμε:

$$\vec{P}_{\pi\rho} = \vec{P}_{\mu\epsilon\tau} \rightarrow$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{\kappa} \rightarrow$$

$$v_{\kappa} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{0,1 \cdot 4,5 + 0,2 \cdot (-4,5)}{0,1 + 0,2} \text{ m/s} = -1,5 \text{ m/s}$$

Παίρνοντας το συσσωμάτωμα στην θέση ισορροπίας του έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow$$

$$F_{ελ1} = F_{ελ2} \rightarrow k_1 \cdot \Delta \ell_1 = k_2 \cdot \Delta \ell_2 \rightarrow \Delta \ell_1 = 2 \cdot \Delta \ell_2$$

$$\text{Όμως } \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2 = 0,3 \text{ m} \rightarrow$$

$$\Delta \ell_1 = 0,2 \text{ m} \text{ και } \Delta \ell_2 = 0,1 \text{ m}$$

Οπότε τη στιγμή της κρούσης το συσσωμάτωμα βρίσκεται σε απομάκρυνση $x = 0,15 \text{ m} - 0,2 \text{ m} = -0,05 \text{ m}$ (0,05m αριστερά της νέας θέσης ισορροπίας του).

Έτσι η ενέργεια της νέας ταλάντωσης είναι:

$$E_{\tau} = K + U = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{\kappa}^2 + \frac{1}{2} (k_1 + k_2) x^2 = \frac{1}{2} 0,3 \cdot 1,5^2 \text{ J} + \frac{1}{2} 90 \cdot 0,05^2 \text{ J} = 3,4875 \text{ J}$$

iii) Για την απώλεια της μηχανικής ενέργειας υπάρχουν δύο λύσεις:

Ο μαθητής Α γράφει:

Η μηχανική ενέργεια, εμφανίζεται με δυο μορφές. Ως κινητική και ως δυναμική και το άθροισμά τους ονομάζεται μηχανική ενέργεια που στην περίπτωσή μας είναι:

$$E_{\mu\eta\chi} = K + U = E_{\text{ταλ}}$$

οπότε η απώλεια της μηχανικής ενέργειας είναι ίση με την μείωση της ενέργειας ταλάντωσης:

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = (E_1 + E_2) - E_{\tau} = 1,35 \text{ J} + 2,7 \text{ J} - 3,4875 \text{ J} = 0,5645 \text{ J}$$

Ο μαθητής Β γράφει:

Αν στη θέση της κρούσης το πρώτο ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta \ell_1$ και το δεύτερο $\Delta \ell_2$ έχουμε:

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = E_{\mu\eta\chi / \text{πριν}} - E_{\mu\eta\chi / \text{μετά}}$$

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = \left(\frac{1}{2} k_1 (\Delta \ell_1)^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \right) + \left(\frac{1}{2} k_2 (\Delta \ell_2)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2} k_1 (\Delta \ell_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (\Delta \ell_2)^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{\kappa}^2 \right)$$

ή

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{\kappa}^2 \quad \text{ή}$$

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2} 0,1 \cdot 4,5^2 \text{ J} + \frac{1}{2} 0,2 \cdot 4,5^2 \text{ J} - \frac{1}{2} 0,3 \cdot 1,5^2 \text{ J} = 3,38 \text{ J}$$

Ερωτήματα:

- 1) Ποιος μαθητής έχει δίκιο;
- 2) Τι πρέπει να προσέξουμε κατά τη διδασκαλία μας, ώστε να αποφύγει την λανθασμένη απάντηση ο ένας μαθητής μας;

dmargaris@sch.gr