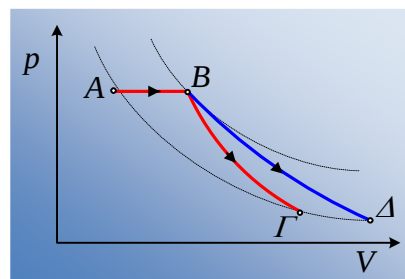


Δύο αέρια και δυο μεταβολές τους.

Ένα αέριο X, εκτελεί τις αντιστρεπτές μεταβολές AB και BΓ, όπου κατά τη διάρκεια της BΓ, το αέριο δεν ανταλλάσσει θερμότητα με το περιβάλλον. Εξάλλου αν το αέριο X αντικατασταθεί με άλλο αέριο Y, οι αντίστοιχες μεταβολές θα ήταν AB και BΔ.

Δίνεται ότι το αέριο X κατά τη διάρκεια της μεταβολής AB απορροφά θερμότητα Q_1 , παράγοντας έργο W_1 .



i) Στη διάρκεια της μεταβολής BΓ, το αέριο X παράγει έργο:

α) $W_{B\Gamma}=W_1$ β) $W_{B\Gamma}=Q_1$ γ) $W_{B\Gamma}=Q_1-W_1$

ii) Στη διάρκεια της μεταβολής AB, το αέριο Y παράγει έργο:

α) $W_{AB} < W_1$, β) $W_{AB}=W_1$, γ) $W_{AB} > W_1$.

iii) Στη διάρκεια της μεταβολής BΔ, το αέριο Y παράγει έργο W_2 , όπου:

α) $W_2 < W_{B\Gamma}$, β) $W_2 = W_{B\Gamma}$, γ) $W_2 > W_{B\Gamma}$.

iv) Να αποδείξετε ότι κατά την αδιαβατική μεταβολή, ο νόμος του poisson μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$T \cdot V^{\gamma-1} = \text{σταθ.}$$

v) Το αέριο X ή το αέριο Y έχει μεγαλύτερο λόγο $\gamma = C_p/C_v$;

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:

i) Στη διάρκεια της μεταβολής AB, ο 1^{ος} θερμοδυναμικός νόμος μας δίνει:

$$Q_1 = \Delta U_1 + W_1 \rightarrow \Delta U_1 = Q_1 - W_1.$$

Αλλά κατά τη διάρκεια της αδιαβατικής μεταβολής BΓ, το αέριο επανέρχεται στην αρχική του θερμοκρασία, συνεπώς:

$$\Delta U_{AB\Gamma} = 0 \text{ ή } \Delta U_{AB} + \Delta U_{B\Gamma} = 0 \text{ ή } \Delta U_{B\Gamma} = -\Delta U_{AB} = -\Delta U_1.$$

Όμως στην αδιαβατική μεταβολή BΓ ο 1^{ος} θερμοδυναμικός νόμος μας δίνει:

$$Q = \Delta U_{B\Gamma} + W_{B\Gamma} = 0 \text{ ή }$$

$$W_{B\Gamma} = -\Delta U_{B\Gamma} = +\Delta U_1 = Q_1 - W_1$$

Σωστή η γ) πρόταση.

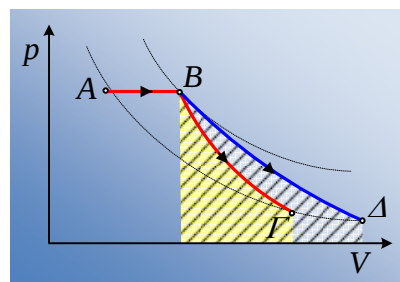
ii) Το έργο στη διάρκεια της ισοβαρούς θέρμανσης AB δίνεται από την εξίσωση $W_{AB} = p \cdot \Delta V = W_1$ αφού είναι ανεξάρτητο του αερίου που την πραγματοποιεί. Σωστό το β).

iii) Το έργο κατά τη διάρκεια της BΓ είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν του σχήματος με κίτρινο χρώμα, ενώ το αντίστοιχο έργο κατά τη διάρκεια της BΔ, με το εμβαδόν του σχήματος που είναι γραμμοσκιασμένο. Από το σχήμα γίνεται φανερό, ότι:

$$W_{B\Delta} > W_{B\Gamma}$$

Σωστή η γ) πρόταση.

iv) Έστω μια αδιαβατική μεταβολή, όπως η BΓ, για την οποία ο νό-



μος του poisson δίνει:

$$\begin{aligned} p_1 V_1^\gamma &= p_2 V_2^\gamma \rightarrow \\ p_1 V_1 V_1^{\gamma-1} &= p_2 V_2 V_2^{\gamma-1} \rightarrow \\ nRT_1 V_1^{\gamma-1} &= nRT_2 V_2^{\gamma-1} \rightarrow \\ T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} &= T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} \end{aligned}$$

ν) Αν T_2 η θερμοκρασία στην κατάσταση Β και T_1 η θερμοκρασία στις καταστάσεις Γ και Δ.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω εξίσωση για την αδιαβατική μεταβολή ΒΓ παίρνουμε;

$$T_2 \cdot V_B^{\gamma_1-1} = T_1 \cdot V_\Gamma^{\gamma_1-1} \rightarrow \left(\frac{V_\Gamma}{V_B} \right)^{\gamma_1-1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (1)$$

Αντίστοιχα για την αδιαβατική ΒΔ θα έχουμε:

$$\left(\frac{V_\Delta}{V_B} \right)^{\gamma_2-1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (2)$$

Από (1) και (2) παίρνουμε:

$$\left(\frac{V_\Gamma}{V_B} \right)^{\gamma_1-1} = \left(\frac{V_\Delta}{V_B} \right)^{\gamma_2-1} \quad (3)$$

Αλλά $1 < \left(\frac{V_\Gamma}{V_B} \right) < \left(\frac{V_\Delta}{V_B} \right)$ και για να ισχύει η σχέση (3) θα πρέπει:

$$\begin{aligned} \gamma_1-1 &> \gamma_2-1 \rightarrow \\ \gamma_1 &> \gamma_2. \end{aligned}$$

Σχόλια:

- 1) Στο iii) ερώτημα βρήκαμε ότι $W_{B\Delta} > W_{B\Gamma}$ συνεπώς και $|\Delta U_{B\Delta}| > |\Delta U_{B\Gamma}|$, ή με λόγια κατά την ΒΔ η εσωτερική ενέργεια του Υ αερίου μειώνεται περισσότερο από την εσωτερική ενέργεια του Χ. Ας μην ξεχνάμε όμως ότι η καταστατική εξίσωση για την κατάσταση Β, δίνει $pV=nRT$, οπότε μιλάμε για ίσα mol των δύο αερίων. Όμως $\Delta U=nC_v\Delta T$, συνεπώς και $C_{v2} > C_{v1}$. Αλλά $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v}$ οπότε το αέριο με την μεγαλύτερη γραμμομοριακή ειδική θερμότητα C_v , θα έχει το μικρότερο λόγο γ .
- 2) Όταν μας δίνουν μια ισόθερμη και μια αδιαβατική, λέμε ότι μεγαλύτερη κλίση παρουσιάζει η αδιαβατική και η ερμηνεία δίνεται μέσω του έργου. (Σε μια αδιαβατική εκτόνωση έχουμε $W > 0$, οπότε $\Delta U < 0$ και το αέριο πηγαίνει σε μικρότερη θερμοκρασία). Όμως αυτό μπορεί να υποστηριχθεί και μαθηματικά και παρόλο που η γνώση της αντίστοιχης απόδειξης, δεν είναι για τους μαθητές της Β' Τάξης, θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι η μορφή των καμπυλών είναι ίδια, με τη διαφορά ότι ενώ στην ισόθερμη $pV=\text{σταθ.}$ στην αδιαβατική $pV^\gamma=\text{σταθ.}$ Συνεπώς η δεύτερη έχει μεγαλύτερη κλίση, επειδή ο εκθέτης του V , είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο εκθέτη της ισόθερμης, που είναι 1. Αλλά με την ίδια λογική

και αν έχουμε δύο αδιαβατικές με εξισώσεις $pV^\gamma = \text{σταθ}$, αυτή που αντιστοιχεί σε μεγαλύτερο λόγο $\gamma = C_p/C_v$, θα είναι και περισσότερο απότομη.

- 3) Οι παραπάνω αδιαβατικές, με βάση τα παραπάνω, θα μπορούσαν η μεν πρώτη να αποδοθεί σε ένα μονοατομικό αέριο ($\gamma = 5/3 = 1,67$) και η δεύτερη σε ένα διατομικό (ας πούμε $\gamma = 1,4$)

dmargaris@sch.gr