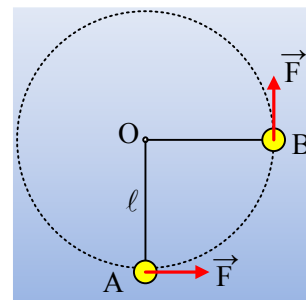


Κυκλική κίνηση και ενέργειες.

Ένα σώμα μάζας 2kg ηρεμεί δεμένο στο άκρο κατακόρυφου νήματος μήκους $\ell=1\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε σταθερό σημείο O. Σε μια στιγμή, ασκούμε στο σώμα μια δύναμη F, εφαπτομενικά όπως στο σχήμα, μέχρι να φτάσει στη θέση B, όπου το νήμα γίνεται οριζόντιο. Στη θέση B η δύναμη F παύει να ασκείται, ενώ το έργο της για την παραπάνω μετακίνηση είναι ίσο με 100J.



- i) Να υπολογίσετε το έργο του βάρους για την κίνηση από τη θέση A στη θέση B.
- ii) Πόση είναι η κινητική ενέργεια του σώματος στη θέση B;
- iii) Να υπολογίσετε την τάση του νήματος στις θέσεις A και B.
- iv) Ποια η ελάχιστη κινητική ενέργεια που θα αποκτήσει στη συνέχεια κατά την περιστροφή του το σώμα και πόση θα είναι τη στιγμή αυτή η τάση του νήματος;
- v) Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης F, αν παραμένει σταθερό.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Το βάρος είναι μια συντηρητική δύναμη και το έργο του δεν εξαρτάται από τη διαδρομή, αλλά εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση:

$$W_w = U_A - U_B$$

Όπου U_A η δυναμική ενέργεια στη θέση A και U_B στη θέση B. Αν τώρα θεωρήσουμε μηδενική τη δυναμική ενέργεια στο A, θα έχουμε:

$$W_w = U_A - U_B = -mgh = -mg\ell = -2 \cdot 10 \cdot 1\text{J} = -20\text{J}$$

- ii) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) για την κίνηση του σώματος από τη θέση A μέχρι τη θέση B:

$$K_B - K_A = W_F + W_w + W_T$$

Αλλά $W_T=0$, αφού η δύναμη είναι κάθετη στη μετατόπιση, οπότε με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$K_B - 0 = 80\text{J} - 20\text{J} + 0 = 60\text{J}$$

- iii) Πριν ασκηθεί η δύναμη F, το σώμα ισορροπεί στην θέση A, οπότε $\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow T_1 = w = mg = 20\text{N}$.

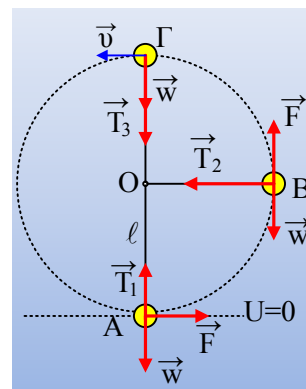
Αμέσως μετά την εξάσκηση της δύναμης το σώμα αρχίζει να κινείται σε κυκλική τροχιά, οπότε:

$$\Sigma F_R = m \frac{v^2}{R} \rightarrow T_1 - mg = m \frac{v^2}{R}$$

Αλλά στη θέση A, αμέσως μετά την άσκηση της δύναμης F, η ταχύτητα είναι μηδενική και η παραπάνω εξίσωση δίνει $T_1 - mg = 0 \rightarrow T_1 = mg = 20\text{N}$.

Βλέπουμε δηλαδή ότι η εξάσκηση της εφαπτομενικής δύναμης F, δεν επηρεάζει την τάση του νήματος.

Αλλά και για τη θέση B θα έχουμε:



$$\Sigma F_R = m \frac{v^2}{R} \rightarrow T_2 = m \frac{v^2}{R} \rightarrow$$

$$T_2 = \frac{mv^2}{R} = \frac{2K_B}{\ell} = \frac{2 \cdot 60}{1} N = 120 N$$

Όπου $K_B = \frac{1}{2}mv^2$ η κινητική ενέργεια του σώματος στη θέση B.

iv) Για όσο χρόνο το σώμα ανέρχεται η κινητική ενέργεια του σώματος θα μειώνεται. Συνεπώς η κινητική ενέργεια γίνεται ελάχιστη, όταν το σώμα φτάσει (αν φτάσει) στο ανώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς. Κατά τη διάρκεια της παραπάνω κίνησης η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα και παράγει έργο, είναι το βάρος, δύναμη συντηρητική, συνεπώς η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή.

$$K_B + U_B = K_\Gamma + U_\Gamma$$

$$K_B + mg\ell = K_\Gamma + mg \cdot 2\ell \rightarrow$$

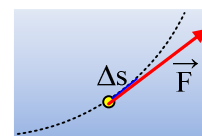
$$K_\Gamma = K_B - mg\ell = 60 J - 20 J = 40 J$$

Εξάλλου για τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα έχουμε:

$$\Sigma F_R = m \frac{v^2}{R} \rightarrow T_3 + mg = m \frac{v^2}{R} \rightarrow$$

$$T_3 = \frac{mv^2}{R} - mg = \frac{2K_\Gamma}{\ell} - mg = \frac{2 \cdot 40}{1} N - 20 N = 60 N$$

v) Το έργο μιας δύναμης υπολογίζεται από την εξίσωση $W = F \cdot \Delta x$ συνα, όπου α η γωνία μεταξύ δύναμης και μετατόπισης. Εδώ η δύναμη δεν είναι σταθερή (και η κίνηση δεν είναι ευθύγραμμη), αλλά αν πάρουμε μια στοιχειώδη μετατόπιση $\Delta x = \Delta s$, ίση με ένα απειροστό μήκος τόξου, τότε η γωνία μεταξύ δύναμης και μετατόπισης είναι μηδενική και $\Delta W = F \cdot \Delta s$. Αν τώρα χωρίσουμε σε πολύ μικρά στοιχειώδη τόξα με μήκη $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ και υπολογίσουμε το στοιχειώδες έργο για κάθε τέτοιο τόξο και στη συνέχεια προσθέσουμε αυτά τα έργα, θα βρούμε το ολικό έργο:



$$W_{AB} = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots + \Delta W_n = F\Delta s_1 + F\Delta s_2 + \dots + F\Delta s_n = F(\Delta s_1 + \Delta s_2 + \dots + \Delta s_n) \rightarrow$$

$$W_{AB} = F(\Delta s_1 + \Delta s_2 + \dots + \Delta s_n) = Fs = F \frac{2\pi R}{4}$$

Αφού το μήκος του τόξου είναι $s = \frac{1}{4} 2\pi R$. Οπότε:

$$F = \frac{2W_{AB}}{\pi \ell} = \frac{2 \cdot 100}{\pi \cdot 1} N \approx 63,7 N$$

Σχόλια:

- 1) Κατά την κίνηση από το A στο B, στο σώμα ασκείται η δύναμη F, η οποία δεν είναι συντηρητική, οπότε δεν θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας (ΑΔΜΕ). Ισχύει βέβαια η διατήρηση της ενέργειας την οποία θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε, αρκεί να σκεφτούμε ότι μέσω της

δύναμης F προσφέρεται ενέργεια στο σώμα $80J$. Ένα μέρος εμφανίζεται ως αύξηση της δυναμικής ενέργειας ίσο με $mgh=20J$ και το υπόλοιπο ($60J$) εμφανίζεται ως κινητική ενέργεια στη θέση B .

- 2) Ορίσαμε αυθαίρετα τη δυναμική ενέργεια να έχει μηδενική τιμή στο οριζόντιο επίπεδο που περνά από τη θέση A . Θα μπορούσαμε να πάρουμε ένα οποιοδήποτε άλλο οριζόντιο επίπεδο, για παράδειγμα αυτό του σχήματος. Θα είχαμε:

$$W_w = U_A - U_B = mgz - mg(\ell + z) = -mg\ell = -2 \cdot 10 \cdot 1J = -20J$$

Αυτό δικαιολογεί «το αυθαίρετο» του ορισμού του επιπέδου αναφοράς.

Να σημειωθεί ότι στο iv) ερώτημα αφήσαμε το ίδιο επίπεδο ως επίπεδο μηδενικής ενέργειας, (ουσιαστικά για να μην σχεδιάσουμε νέο σχήμα, *τεμπελιά!!!*), ενώ θα μπορούσαμε να ορίσουμε νέο, που να περνά από τη χαμηλότερη θέση (τη θέση B), οπότε θα είχαμε:

$$K_B + U_B = K_\Gamma + U_\Gamma$$

$$K_B + 0 = K_\Gamma + mg \cdot \ell \rightarrow$$

$$K_\Gamma = K_B - mg\ell = 60J - 20J = 40J$$

- 3) Θα μπορούσαμε στο iv) ερώτημα να δουλέψουμε ξανά με Θ.Μ.Κ.Ε.:

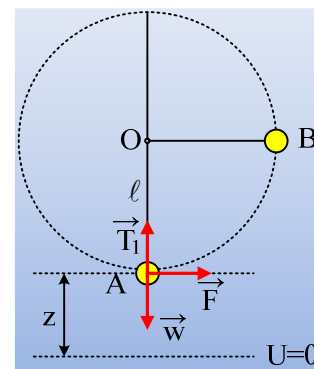
$$K_\Gamma - K_B = W_w + W_T \rightarrow$$

$$K_\Gamma = K_B + W_w + 0 = K_B - mg\ell = 40J$$

- 4) Ψάξαμε την ελάχιστη κινητική ενέργεια στο ανώτερο σημείο της τροχιάς. Και ποιος μας λέει ότι το σώμα θα φτάσει στην θέση αυτή; Θα μπορούσε πριν φτάσει, το νήμα να χαλάρωνε και το σώμα να εκτελούσε μια πλάγια βολή. Απλά με την υπόθεση ότι φτάνει πάνω, υπολογίσαμε την κινητική του ενέργεια.

α) Αν ο υπολογισμός μας έδινε $K_\Gamma < 0$, προφανώς η υπόθεσή μας θα ήταν λανθασμένη.

β) Αλλά και αν υπολογίζαμε $K_\Gamma > 0$, δεν είμαστε σίγουροι ότι το σώμα φτάνει στην παραπάνω θέση. Ο έλεγχος γίνεται υπολογίζοντας το μέτρο της τάσης του νήματος. Το σώμα φτάνει στο ανώτερο σημείο της τροχιάς, διαγράφοντας τον κατακόρυφο κύκλο, μόνο αν βρούμε $T_3 \geq 0$, διαφορετικά πρέπει να ψάξουμε παραπέρα για λύση....



dmargaris@sch.gr