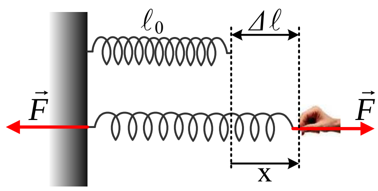
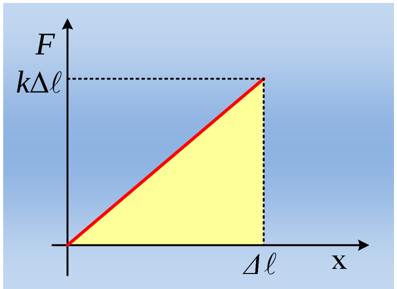
Η δυναμική ενέργεια ελαστικότητας και το μονωμένο σύστημα..



Έστω ένα ελατήριο, το ένα άκρο του οποίου είναι σταθερά δεμένο. Αν στο άλλο άκρο του ασκήσουμε μια δύναμη **F** μπορούμε να το επιμηκύνουμε κατά $\Delta\ell$, ενώ ο νόμος του Hooke, ο οποίος συνδέει την ασκούμενη δύναμη και το αποτέλεσμα της δράσης της (παραμόρφωση) μας δίνει $F=k\cdot\Delta\ell$.

Ας επιστρέψουμε ξανά στο ελατήριο και ασκώντας συνεχώς στο άκρο του μια μεταβλητή δύναμη **F**, κινούμε το άκρο του προς τα δεξιά, επιμηκύνοντάς το αργά-αργά, μέχρι μιας τελικής επιμήκυνσης $\Delta\ell$.

Σε κάθε θέση θα ισχύει $F=k\cdot x$, όπου x η μετατόπιση του άκρου (ίση προφανώς με την επιμήκυνση του ελατηρίου). Αλλά τότε η δύναμη F, παράγει έργο, το οποίο εκφράζει την ενέργεια που μεταφέρεται από το χέρι μας, στο ελατήριο. Ναι, αλλά πόσο είναι το έργο της δύναμης αυτής;



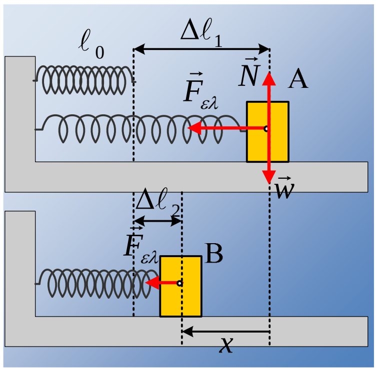
Αφού η δύναμη δεν έχει σταθερό μέτρο, το έργο της θα υπολογιστεί με τη βοήθεια του διαγράμματος F-x, όπως στο διπλανό σχήμα.

Το έργο της δύναμης F, είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κίτρινο χρώμα:

$$W_F = \frac{1}{2}(\Delta\ell)\cdot(k\Delta\ell) = \frac{1}{2}k\cdot(\Delta\ell)^2$$

Αλλά τότε, στη διάρκεια της επιμήκυνσης του ελατηρίου, μεταφέρθηκε (από εμάς που το τραβήξαμε), μέσω του έργου της δύναμης F, στο ελατήριο ενέργεια ίση με $\frac{1}{2}k\cdot(\Delta\ell)^2$, οπότε το ελατήριο περικλείει (έχει) ενέργεια ίση με $U=\frac{1}{2}k\cdot(\Delta\ell)^2$. Η ενέργεια αυτή αποκαλείται **δυναμική ελαστική ενέργεια** και είναι η ενέργεια που ένα παραμορφωμένο ελατήριο, μπορεί να αποδώσει σε ένα σώμα, το οποίο θα συνδεθεί με αυτό.

Εφαρμογή 1η :



Έστω ότι σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο συγκρατείται στη θέση Α, ένα σώμα, μάζας 2kg δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου (ένα ελατήριο που υπακούει απολύτως στο νόμο του Hooke και που η μάζα του θεωρείται αμελητέα), σταθεράς k=200N/m, έχοντας επιμηκύνει το ελατήριο κατά $\Delta\ell_1$=0,4m. Αφήνουμε το σώμα να κινηθεί, οπότε μετά από λίγο φτάνει στο σημείο Β, έχοντας μετατοπισθεί κατά x=0,3m.

i) Να υπολογιστεί η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στις θέσεις Α και Β.

ii) Πόσο είναι το έργο της δύναμης που άσκησε το ελατήριο στο σώμα;

iii) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος στη θέση Β.

Απάντηση:

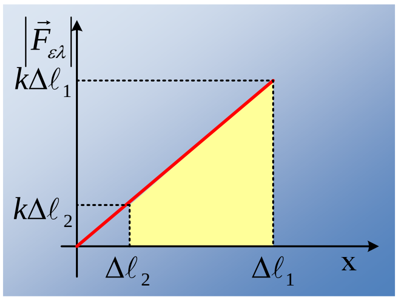
i) Η αρχική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι:

$$U_A = U_1 = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_1)^2 = \frac{1}{2}200\cdot 0{,}4^2\,J = 16J$$

Ενώ στη θέση Β είναι:

$$U_B = U_2 = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_2)^2 = \frac{1}{2}200\cdot 0{,}1^2\,J = 1J$$

ii) Για να βρούμε το έργο της δύναμης του ελατηρίου, ξέροντας ότι το μέτρο της υπακούει στο νόμο του Hooke (δράση αντίδραση με τη δύναμη που ασκεί το σώμα στο ελατήριο), κατασκευάζουμε το διπλανό διάγραμμα. Το έργο της είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν του κίτρινου τραπεζίου του διαγράμματος:



$$W_{F_{\varepsilon\lambda}} = \frac{k\Delta\ell_2 + k\Delta\ell_1}{2}(k\Delta\ell_1 - k\Delta\ell_2) \rightarrow$$

$$W_{F_{\varepsilon\lambda}} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_1)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta\ell_2)^2 = 16J\text{-}1J = 15J.$$

iii) Εφαρμόζουμε για την κίνηση του σώματος από τη θέση Α, στην Β, το Θ.Μ.Κ.Ε. και παίρνουμε:

$$K_B - K_A = W_{F\varepsilon\lambda} + W_w + W_N$$

Αλλά το βάρος και η κάθετη αντίδραση Ν, δεν παράγουν έργο, οπότε:

$$K_B - K_A = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_1)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta\ell_2)^2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_1)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta\ell_2)^2 \rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{k}{m}\left((\Delta\ell_1)^2 - (\Delta\ell_2)^2\right)} \rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{200}{2}(0{,}4^2 - 0{,}1^2)}\,m/s = \sqrt{15}\,m/s$$

Σχόλια:

Η σχέση (1) γράφεται:

$$K_B - K_A = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_1)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta\ell_2)^2 \rightarrow$$

$$K_2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell_2)^2 = K_A + \frac{1}{2}k(\Delta\ell_1)^2 \rightarrow$$

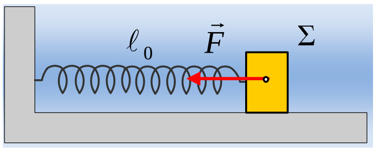
$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1$$

Δηλαδή για το σύστημα ελατήριο-σώμα **η μηχανική ενέργεια** (το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας) παραμένει σταθερή. Αλλά αυτό μας επιτρέπει να λέμε ότι η δύναμη που ασκεί το ελατήριο, η $\mathbf{F_{\varepsilon\lambda}}$, είναι μια **συντηρητική (διατηρητική) δύναμη**, το έργο της οποίας υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$W_{F_{\varepsilon\lambda}} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_1)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta\ell_2)^2 = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda}$$

Εξίσωση που έχουμε συναντήσει και όταν υπολογίζουμε το έργο του βάρους.

Εφαρμογή 2η :

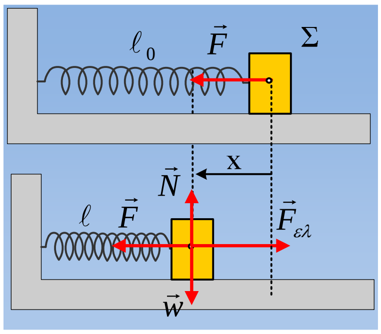


Σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα σώμα Σ, μάζας 2kg σε επαφή με το άκρο ιδανικού, σταθεράς k=100N/m. Ασκώντας στο σώμα μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F=20N, όπως στο σχήμα, συμπιέζουμε το ελατήριο.

i) Να βρεθεί η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.

ii) Τη στιγμή που το ελατήριο αποκτά το ελάχιστο μήκος του μηδενίζουμε την ασκούμενη δύναμη F. Να υπολογιστεί η μέγιστη επιτάχυνση καθώς και η μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα Σ.

Απάντηση:



Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ, όπου **F** η δύναμη που ασκούμε εμείς και η δύναμη $\mathbf{F_{\varepsilon\lambda}}$, που ασκεί το ελατήριο στο σώμα.

i) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την διάρκεια της συσπείρωσης του ελατηρίου και παίρνουμε:

$$K_\tau - K_\alpha = W_F + W_{F\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$0 - 0 = F\cdot x + U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

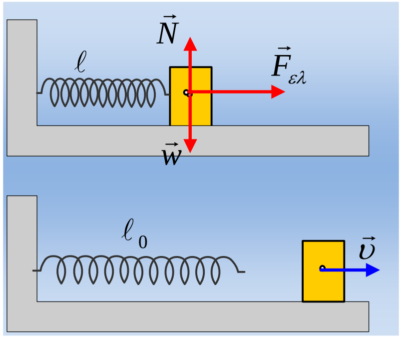
$$0 = F\cdot x + 0 - \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow$$

$$x(2F - kx) = 0 \rightarrow$$

$$\text{ή} \quad x=0 \text{ ή } x = \frac{2F}{k} = \frac{2\cdot 20}{100}m = 0{,}4m$$

Η τιμή x=0 αντιστοιχεί στην αρχική θέση, οπότε η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου θα είναι 0,4m.

ii) Μόλις καταργηθεί η ασκούμενη από εμάς δύναμη **F**, το σώμα με την επίδραση της δύναμης του ελατηρίου θα κινηθεί προς τα δεξιά.



Από το 2[ο] νόμο του Νεύτωνα έχουμε ΣF=m·α ή $F_{ελ}$=m·α, συνεπώς η μέγιστη επιτάχυνση θα είναι στη θέση που και η δύναμη του ελατηρίου έχει μέγιστο μέτρο:

$$a_{max} = \frac{kx_{max}}{m} = \frac{100 \cdot 0{,}4}{2} m/s^2 = 20 m/s^2 .$$

Προφανώς το σώμα θα επιταχυνθεί προς τα δεξιά, επιταχυνόμενο, για όσο χρόνο δέχεται δύναμη από το ελατήριο. Μόλις όμως το ελατήριο αποκτήσει το φυσικό μήκος του, τότε το σώμα αποχωρίζεται από το ελατήριο και κινείται με σταθερή ταχύτητα. Στην παραπάνω κίνηση η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι η δύναμη του ελατηρίου, δύναμη συντηρητική, συνεπώς η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή.

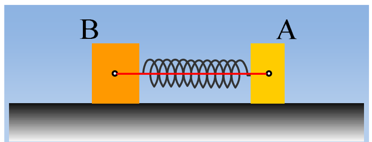
$$E_{αρχ} = E_{τελ} \rightarrow$$

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$0 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0 \rightarrow$$

$$\upsilon = x\sqrt{\frac{k}{m}} = 0{,}4\sqrt{\frac{100}{2}} m/s = 2\sqrt{2} m/s$$

Εφαρμογή 3η :



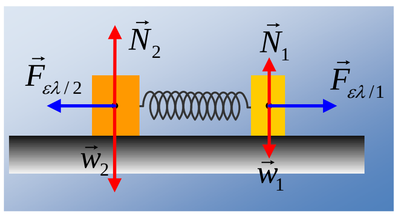
Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δύο σώματα Α και Β με μάζες 2kg και 3kg έχοντας συμπιέσει ένα ελατήριο σταθεράς k=200N/m, κατά 0,4m, ενώ συγκρατούνται δεμένα στα άκρα νήματος, όπως στο σχήμα.

Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα και τα σώματα κινούνται. Κάποια στιγμή το Α σώμα έχει ταχύτητα υ_1=3m/s.

i) Να βρεθεί τη στιγμή αυτή η ταχύτητα του σώματος Β.

ii) Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου και συμπίεσή του.

Απάντηση:



i) Μόλις κόψουμε το νήμα, τα σώματα δέχονται δυνάμεις από το συμπιεσμένο ελατήριο, με αποτέλεσμα να επιταχύνονται, το Α προς τα δεξιά και το Β, προς τα αριστερά. Αν πάρουμε το σύστημα σώμα Α- σώμα Β-ελατήριο, οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται είναι τα βάρη και οι κάθετες αντιδράσεις από το επίπεδο. Συνεπώς το σύστημα είναι μονωμένο και ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής. Έτσι θεωρώντας αρχική κατάσταση τη στιγμή που κόβουμε το νήμα και τελική τη στιγμή που το σώμα Α έχει ταχύτητα παίρνουμε:

$$\vec{P}_{αρχ} = \vec{P}_{τελ} \rightarrow$$

$$0 = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 \ \rightarrow \ (1)$$

Και αλγεβρικά παίρνουμε:

$$\upsilon_2 = -\frac{m_1}{m_2}\upsilon_1$$

Οπότε θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική, οπότε υ_1=+2m/s παίρνουμε:

$$\upsilon_2 = -\frac{m_1}{m_2}\upsilon_1 = -\frac{2}{3}3m/s = -2m/s$$

Πράγμα που σημαίνει ότι το σώμα Β κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου 2m/s.

ii) Οι δυνάμεις που παράγουν έργο στο παραπάνω χρονικό διάστημα είναι μόνοι οι δυο δυνάμεις από το ελατήριο, δυνάμεις συντηρητικές, συνεπώς η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή:

$$E_{αρχ}=E_{τελ} \rightarrow$$

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}\rightarrow$$

$$0+\frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \rightarrow$$

$$0+\frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + U_2 \rightarrow$$

$$U_2 = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}200\cdot 0{,}4^2 - \frac{1}{2}2\cdot 3^2\,J - \frac{1}{2}2\cdot 2^2\,J = 16J - 9J - 4J = 3J$$

$$\text{Αλλά } U_2 = \frac{1}{2}kx_2^2 \rightarrow x_2 = \sqrt{\frac{2U_2}{k}} = \sqrt{\frac{2\cdot 3}{200}}m = 0{,}1\sqrt{3}m = 0{,}173m$$

Σχόλιο:

Φτάνοντας στη σχέση (1), θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, θα μπορούσαμε να γράψουμε $0=m_1\upsilon_1-m_2\upsilon_2$, παίρνοντας ως «γνωστό» ότι το σώμα Β θα κινηθεί προς τα αριστερά.

Αλλά τότε θα βρίσκαμε, υ_2=2m/s και αυτό θα ήταν το μέτρο της ταχύτητας.

dmargaris@sch.gr