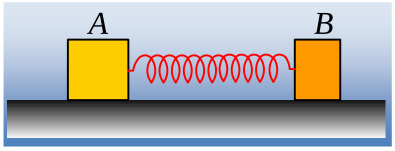
Οι αρχές διατήρησης της ορμής και της ενέργειας.



Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο σώματα Α και Β, με μάζες Μ=2kg και m=1kg, δεμένα στα άκρα ιδανικού ελατηρίου με φυσικό μήκος ℓ_0=0,5m. Πιάνοντας τα δυο σώματα συμπιέζουμε το ελατήριο, μέχρι το ελατήριο να αποκτήσει μήκος ℓ_1=0,2m και τα αφήνουμε ελεύθερα να κινηθούν. Τη στιγμή t_1 που το ελατήριο αποκτά μήκος ℓ_2=0,6m για πρώτη φορά, το σώμα Α έχει ταχύτητα μέτρου υ_1=1m/s. Τη στιγμή αυτή πιάνουμε και ακινητοποιούμε ακαριαία το σώμα Α.

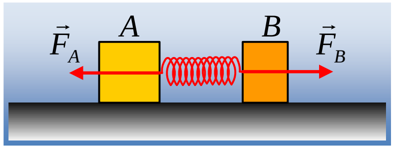
i) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος Β τη στιγμή t_1.

ii) Να υπολογιστεί η σταθερά του ελατηρίου.

iii) Ποιο είναι το μέγιστο μήκος που θα αποκτήσει το ελατήριο;

iv) Πόση είναι η μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα Β;

Απάντηση:



Είμαι ένας μαθητής της Β΄Λυκείου (λέμε τώρα☺)! που μου δίνεται το παραπάνω πρόβλημα. Το πρώτο πράγμα που μου έρχεται στο μυαλό, είναι να μελετήσω την κίνηση του σώματος Β, την οποία να συνδέσω, αν χρειαστεί με την κίνηση του σώματος Α. Γράφω λοιπόν $\upsilon_2=a\cdot t$, αλλά μου χρειάζεται η επιτάχυνση, την οποία θα βρω από το θεμελιώδη νόμο: $F=m_2\cdot a_2$. Ναι αλλά η δύναμη;

Εντάξει θα την βρω από το νόμο του Hooke $F=k\cdot\Delta\ell$!!! Σιγά-σιγά, και αυτό το $\Delta\ell$; Πόσο είναι 0,3m ή μήπως 0,1m; Όχι δεν κάνει αφού αλλάζει καθώς κινείται το σώμα, οπότε θα αλλάζει και η επιτάχυνση! Μα, τότε η κίνηση δεν θα είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, την οποία ξέρω!!!

Τι μου είπε ο καθηγητής μου, ότι όταν δεν μπορώ από εδώ να πηγαίνω ενεργειακά:

Ωραία θα εφαρμόσω το Θ.Μ.Κ.Ε. για το σώμα Β. Ας το γράψω και βλέπουμε:

$$K_τ - K_α = W_{FB} \rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 = W_{FB}$$

Αλλά η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητική, οπότε $W_{F_B} = U_α - U_τ = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_1)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta\ell_2)^2$.

Σωστά; Ναι, η αρχική μείον την τελική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου. Αλλά, μια στιγμή.

Μήπως η δυναμική ενέργεια που μετατρέπεται σε κινητική, δεν πηγαίνει όλη στο Β σώμα; Και το Α;

Άκυρο…. Πρέπει να βρω κάτι που να βάλει στο παιχνίδι και το Α σώμα…… Το βρήκα!!!!

i) Στο σύστημα σώμα Α-σώμα Β-ελατήριο, οι μόνες δυνάμεις που παράγουν έργο είναι οι δυνάμεις που το ελατήριο ασκεί στα δυο σώματα. Αλλά οι δυνάμεις ελαστικότητας είναι συντηρητικές, συνεπώς η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή:

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}\rightarrow$$

$$0+\frac{1}{2}k(\Delta\ell_1)^2=\frac{1}{2}M\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m\upsilon_2^2+\frac{1}{2}k(\Delta\ell_2)^2 \quad (1)$$

Στην παραπάνω εξίσωση όμως έχω δύο αγνώστους, τη σταθερά k και την ταχύτητα υ_2. Θέλω λοιπόν άλλη μια εξίσωση. Ξανά στο σύστημα λοιπόν των σωμάτων.

Το σύστημα είναι **και** μονωμένο, αφού η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων (βάρη και κάθετη αντίδραση του επιπέδου) είναι μηδενική. Άρα και η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

$$\vec{P}_{αρχ}=\vec{P}_{τελ}\rightarrow$$

Και θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική παίρνουμε:

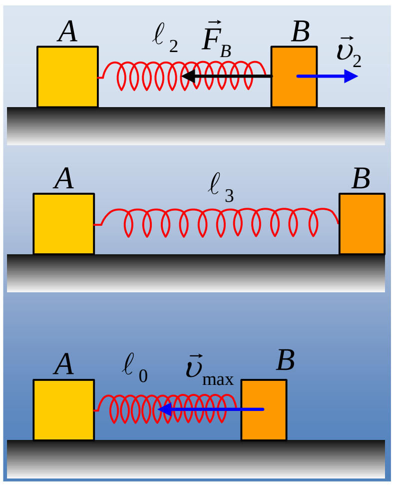
$$0=m\cdot\upsilon_2-M\upsilon_1 \rightarrow \upsilon_2=2\upsilon_1=2m/s$$

ii) Επιστρέφουμε τώρα στη σχέση (1) (ευτυχώς δεν πήγε χαμένη…) και λύνουμε ως προς τη σταθερά k:

$$0+\frac{1}{2}k(\Delta\ell_1)^2=\frac{1}{2}M\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m\upsilon_2^2+\frac{1}{2}k(\Delta\ell_2)^2\rightarrow$$

$$k=\frac{M\upsilon_1^2+m\upsilon_2^2}{(\Delta\ell_1)^2-(\Delta\ell_2)^2}=\frac{2\cdot1^2+1\cdot2^2}{0{,}3^2-0{,}1^2}N/m=\frac{6}{0{,}09-0{,}01}N/m=75N/m$$

iii) Μόλις ακινητοποιήσουμε το σώμα Α, το σώμα Β έχει ταχύτητα προς τα δεξιά, ενώ επιβραδύνεται. δεχόμενο δύναμη $\mathbf{F_B}$ προς τ' αριστερά, όπως στο διπλανό σχήμα. Έτσι το ελατήριο συνεχίζει να επιμηκύνεται μέχρι τη στιγμή που θα μηδενιστεί η ταχύτητα του σώματος Β. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για το σώμα Β, από τη θέση που το ελατήριο έχει μήκος ℓ_2, μέχρι τη θέση που θα μηδενιστεί η ταχύτητά του και το ελατήριο θα αποκτήσει μήκος ℓ_3:



$$K_τ-K_α=W_{FB}\rightarrow 0-\frac{1}{2}m\upsilon_2^2=W_{FB}$$

Αλλά η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητική, οπότε:

$$W_{F_B}=U_α-U_τ=\frac{1}{2}k(\Delta\ell_2)^2-\frac{1}{2}k(\Delta\ell_3)^2, \text{ από όπου:}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_2^2=\frac{1}{2}k(\Delta\ell_3)^2-\frac{1}{2}k(\Delta\ell_2)^2\rightarrow$$

$$(\Delta\ell_3)=\sqrt{\frac{m\upsilon_2^2}{k}+(\Delta\ell_2)^2}=\sqrt{\frac{1\cdot2^2}{75}+0{,}1^2}\,m=0{,}25m$$

Αλλά $\Delta\ell_3=\ell_3-\ell_0$ οπότε $\ell_3=\Delta\ell_3+\ell_0=0{,}25m+0{,}5m=0{,}75m$.

iv) Μετά το μηδενισμό της ταχύτητας του σώματος Β, αυτό θα επιταχυνθεί προς τ' αριστερά και θα συνεχίσει να επιταχύνεται μέχρι το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό μήκος του, αφού στη συνέχεια το σώμα θα συμπιέσει το ελατήριο και θα δεχτεί δύναμη αντίθετης φοράς.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για το σύστημα, από τη στιγμή μηδενισμού της ταχύτητας του Β μέχρι τη στιγμή που το ελατήριο αποκτά το φυσικό μήκος του και παίρνουμε:

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}\rightarrow$$

$$0+\frac{1}{2}k(\Delta\ell_3)^2=\frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2+0\ \rightarrow$$

$$\upsilon_{\max}=\Delta\ell_3\sqrt{\frac{k}{m}}=0{,}25\sqrt{\frac{75}{1}}m/s=1{,}25\sqrt{5}m/s\approx 2{,}2m/s$$

Σχόλια:

1) Η απάντηση στο iii) ερώτημα δόθηκε με τη βοήθεια του Θ.Μ.Κ.Ε. ενώ του iv) με χρήση της Α.Δ.Μ.Ε. Στην πραγματικότητα θα μπορούσαμε να δουλέψουμε και αντίστροφα ή μόνο με τον ένα ή τον άλλο τρόπο. Αυτό ισχύει επειδή το ένα άκρο του ελατηρίου (το οποίο συνδέεται με το Α σώμα) είναι σταθερό, με αποτέλεσμα η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου να συνδέεται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας μόνο του σώματος Β.

2) Στην περίπτωση όμως που κινούνται και τα δυο σώματα, οι μεταβολές της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου, συνδέεται με τις μεταβολές της κινητικής ενέργειας και των δύο σωμάτων, οπότε είμαστε υποχρεωμένοι να δουλέψουμε με τη βοήθεια της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.) και όχι με τη χρήση του Θ.Μ.Κ.Ε., στο οποίο μας χρειάζεται το έργο της δύναμης του ελατηρίου που μας είναι άγνωστο.

3) Όταν είμαστε μαθητές στο δημοτικό και λύναμε μια άσκηση Αριθμητικής (έτσι την λέγαμε τότε…), στην αρχή της λύσης, θα έπρεπε να γράφαμε «σκέψη». Στην πραγματικότητα ήταν μια ανάλυση συλλογισμών, η οποία θα μας οδηγούσε στον τρόπο λύσης.

   Αλλά και αργότερα όταν στο Γυμνάσιο-Λύκειο κάναμε Γεωμετρία (κατασκευές ή γεωμετρικούς τόπους) το πρώτο βήμα ήταν να γράψουμε «ανάλυση», αναλύοντας τα δεδομένα και τις σκέψεις που θα μας οδηγούσαν στην «κατασκευή» ή στην σύνθεση…

   Μια τέτοια προσπάθεια έγινε παραπάνω, πριν απαντηθούν τα συγκεκριμένα ερωτήματα.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης