

Αλλαγή στην θέση ισορροπίας μιας ταλάντωσης

Σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ ισορροπεί με τη βοήθεια κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $K=100\text{N/m}$ έχοντας το άνω του άκρο ακλόνητα στερεωμένο. Την χρονική στιγμή $t=0$ εκτοξεύουμε προς τα κάτω το σώμα με αρχική ταχύτητα μέτρου $u_0=2\text{m/s}$. Την χρονική στιγμή $t=\frac{7\pi}{60}\text{ s}$ εφαρμόζουμε στο σώμα σταθερή κατακόρυφη δύναμη μέτρου $F=10\text{N}$ με φορά προς τα πάνω.

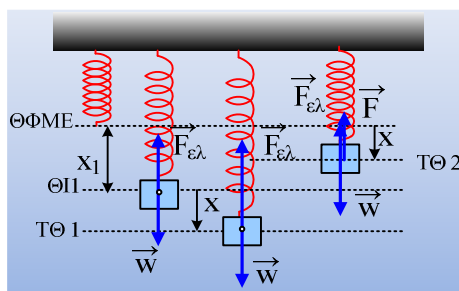
A) Να αποδείξετε ότι το σώμα εκτελεί γ.α.τ. και πριν αλλά και μετά την εφαρμογή της δύναμης.

B) Να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα του σώματος πριν αλλά και μετά την εφαρμογή της δύναμης.

Γ) Να βρεθεί η εξίσωση και να γίνει η γραφική παράσταση της δύναμης του ελατηρίου σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση θετική.

Δίνεται το $g=10\text{m/s}^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



A) Για την αρχική θέση ισορροπίας θα ισχύει $mg=Kx_1$ με $x_1=0,1\text{m}$.

Για την τυχαία θέση (1) μπορούμε να εφαρμόσουμε $\Sigma F=mg-K(x_1+x)=-Kx$ άρα το σώμα πριν την εφαρμογή της δύναμης θα εκτελεί γ.α.τ. με $D=K$.

Για την τελική θέση ισορροπία θα ισχύει $Kx_2+mg-F=0$ άρα μετά την αντικατάσταση των τιμών $x_2=0$. Δηλαδή η νέα ΘΙΤ θα ταυτίζεται με την ΘΦΜΕ.

Για μία νέα τυχαία θέση(2) $\Sigma F=mg-F-Kx=-Kx$ άρα το σώμα μετά την εφαρμογή της δύναμης θα εκτελεί και πάλι γ.α.τ. με $D=K$.

B) Την στιγμή της εκτόξευσης το σώμα βρίσκεται στην ΘΙΤ άρα η αρχική ταχύτητα είναι και η μέγιστη πριν φυσικά εφαρμοσθεί η δύναμη. Άρα $u_{\max 1}=u_0=2\text{m/s}$.

Από τη σχέση της μέγιστης ταχύτητας με το πλάτος θα βρούμε $A=u_0/\omega=0,2\text{m}$.

Με την βοήθεια των εξισώσεων κίνησης πριν την εφαρμογή της δύναμης θα μπορούσαμε να βρούμε τη θέση του σώματος τη στιγμή που εφαρμόζεται η δύναμη

$$x=A\eta\mu\omega t=0,2\eta\mu 10\cdot\frac{7\pi}{60}=-0,1\text{m}.$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι το σώμα βρίσκεται στην ΘΦΜΕ.

Η ταχύτητα του σώματος θα βρεθεί από την εξίσωση της ταχύτητας

$$v = u_0 \sin \omega t = 2 \sin 10 \cdot \frac{7\pi}{60} = -\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Την στιγμή που εφαρμόζεται η δύναμη το σώμα βρίσκεται στην νέα ΘΙΤ. Άρα η ταχύτητα του είναι η νέα μέγιστη για την νέα του ταλάντωση.

Γ) Για την αρχική ταλάντωση και για τυχαία θέση θα ισχύει

$$\Sigma F = -Kx \quad \text{άρα} \quad mg - F_{ελ} = -KA \eta \mu \omega t \quad \text{άρα} \quad F_{ελ} = 10 + 20 \eta \mu 10t \quad 0 \leq t \leq 7\pi/60 \quad (\text{S.I.})$$

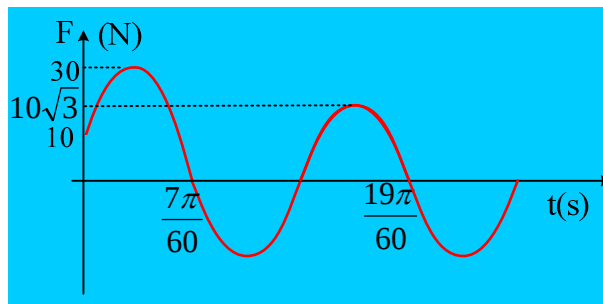
Για την ταλάντωση μετά την εφαρμογή της δύναμης και για τυχαία θέση θα ισχύει

$$\Sigma F = -Kx \quad \text{άρα} \quad mg - F_{ελ}' - F = -KA' \eta \mu(\omega t' + \pi) \quad \text{με} \quad A' = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{\sqrt{3}}{10} m$$

Άρα η εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου θα έχει μορφή

$$F_{ελ}' = 10\sqrt{3} \eta \mu \left[10 \left(t - \frac{7\pi}{60} \right) + \pi \right] \quad t \geq \frac{7\pi}{60} \quad (\text{SI})$$

Άρα η γραφική παράσταση της δύναμης του ελατηρίου θα έχει μορφή



xristoselef@gmail.com