

Περίληψη για την επίλυση της κυματικής εξίσωσης

Η μονοδιάστατη κυματική εξίσωση $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ έχει ως γενική λύση την $u(x,t) = f_+(x-vt) + f_-(x+vt)$.

όπου f_+ και f_- αυθαίρετες συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Η εύρεση των f_+ και f_- εξαρτάται από τις συνοριακές και από τις αρχικές συνθήκες.

Οι συνοριακές συνθήκες εξαρτώνται από την έκταση του μέσου.

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για την έκταση του μέσου

Περίπτωση 1: Το μέσο εκτείνεται από $-\infty$ έως $+\infty$

Στην περίπτωση αυτή δεν απαιτούνται συνοριακές συνθήκες αλλά μόνο αρχικές.

Χρειαζόμαστε τις συναρτήσεις $\varphi(x) = u(x, 0)$, $\Psi(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ $x \in \mathbb{R}$.

Χρειαζόμαστε δηλαδή τις θέσεις και τις ταχύτητες όλων των σημείων του μέσου μια δεδομένη χρονική στιγμή.

Περίπτωση 2: Το μέσο εκτείνεται από 0 έως $+\infty$

Στην περίπτωση αυτή εκτός από τις αρχικές συνθήκες

$\varphi(x) = u(x, 0)$, $\Psi(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ $x \geq 0$ απαιτούνται και πληροφορίες για την αρχή $x=0$.

Χρειάζεται να ξέρουμε ή την συνάρτηση $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$ ή την συνάρτηση $u(0, t)$ $t \in \mathbb{R}$.

Περίπτωση 3: Το μέσο εκτείνεται από 0 έως L

Στην περίπτωση αυτή εκτός από τις αρχικές συνθήκες

$\varphi(x) = u(x, 0)$, $\Psi(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ $0 \leq x \leq L$ απαιτούνται και πληροφορίες για τα άκρα.

$[\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \text{ ή } u(0, t) \text{ } t \in \mathbb{R}]$ και $[\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) \text{ ή } u(L, t) \text{ } t \in \mathbb{R}]$

Οι μαθηματικοί απαιτούν όλες οι παραπάνω συναρτήσεις να είναι τουλάχιστον δις παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους.

Ας δούμε την λύση στην περίπτωση 2 με αρχικές συνθήκες $u(x, 0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ και $u(0, t) = \mu(t)$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$\mu^+ \text{ και } \mu^- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } \mu^+(\xi) = \begin{cases} \mu(\xi) & \xi > 0 \\ 0 & \xi \leq 0 \end{cases} \text{ και } \mu^-(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi \geq 0 \\ \mu(\xi) & \xi < 0 \end{cases}$$

Η λύση στην περίπτωση αυτή δίνεται από την σχέση

$$u(x, t) = \mu^+\left(t - \frac{x}{v}\right) + \mu^-\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

Εστιάζουμε στην περίπτωση που την στιγμή $t=0$ το άκρο O αρχίζει να κινείται (δεν λέω να ταλαντώνεται). Τότε $\mu^-(\xi) = 0$

Επομένως

$$u(x, t) = \mu^+\left(t - \frac{x}{v}\right) = \begin{cases} \mu\left(t - \frac{x}{v}\right) & x < vt \\ 0 & x \geq vt \end{cases}, t \geq 0 \quad (1)$$

Η συνηθισμένη υπόθεση είναι ότι $\mu(t) = H(t)A\sin(\omega t)$ όπου H η συνάρτηση άλματος του

$$\text{Heaviside } H(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}.$$

Η υπόθεση αυτή είναι που δημιουργεί τις γνωστές παθολογίες (ασυνέχεια στο στιγμιότυπο ταχυτήτων στο μέτωπο του κύματος και στην γραφική παράσταση $v(t)$ την χρονική στιγμή έναρξης της κίνησης κάποιου σημείου).

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση μ είναι ομαλή.

Δηλαδή

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ g(t) & 0 < t \leq \tau \\ A\eta\mu(\omega t) & t > \tau \end{cases}$$

Θεωρούμε μια χρονική στιγμή $t > \tau$ και αναζητούμε την λύση της κυματικής εξίσωσης

Για $x > vt$ από την (1) προκύπτει ότι $u(x,t) = 0$

Για $u(t-\tau) \leq x \leq vt$ ισχύει ότι $t - \tau \leq \frac{x}{v} \leq t \Rightarrow 0 \leq t - \frac{x}{v} \leq \tau \Rightarrow \mu(t - \frac{x}{v}) = g(t - \frac{x}{v})$

Για $0 \leq x < u(t-\tau)$ ισχύει ότι $t - \frac{x}{v} > \tau \Rightarrow \mu(t - \frac{x}{v}) = A\eta\mu(\omega t - kx)$

Επομένως για $t > \tau$ έχουμε:

$$u(x,t) = \begin{cases} A\eta\mu(\omega t - kx) & x < u(t-\tau) \\ g(t - \frac{x}{v}) & u(t-\tau) \leq x \leq vt \\ 0 & x > vt \end{cases}$$

Αυτό σημαίνει ότι η κίνηση ενός σημείου από την [στιγμή έναρξης της κίνησης $+t$] είναι αρμονική ταλάντωση.

Σημαίνει επίσης ότι το στιγμιότυπο του κύματος από την θέση $x=0$ έως την θέση [μέτωπο του κύματος $-vt$] είναι αρμονική συνάρτηση.

Παρατηρήσεις

1) Στο μη αρμονικό μέρος του κύματος δεν έχει νόημα να μιλήσουμε για την φάση ενός σημείου.

Επειδή αυτό που έχει σημασία είναι η διαφορά φάσης και όχι η φάση μπορούμε να λέμε ότι το σημείο που βρίσκεται στην θέση : [μέτωπο του κύματος $-vt$] έχει φάση ωt .

Επομένως για μια χρονική στιγμή $t > \tau$ η φάση των σημείων του μέσου είναι

$$\varphi(x,t) = \begin{cases} \omega t - kx & x \leq u(t-\tau) \\ \text{δεν ορίζεται} & x > u(t-\tau) \end{cases}$$

2) Ας υποθέσουμε ότι το μέσο είναι πεπερασμένο εκτεινόμενο στο διάστημα $[0,L]$

Υποθέτουμε επίσης ότι $u(x,0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, $u(0,t) = \mu(t)$ και $u(L,t) = 0$

Η λύση της κυματικής εξίσωσης για $t < \frac{L}{v}$ είναι ίδια με την λύση που παίρνουμε για ημιάπειρο μέσο.

Το σκηνικό

Μπροστά από το παράθυρο της αίθουσας φυσικών επιστημών είναι τεντωμένη μια τεράστια χορδή. Η αριστερή άκρης της είναι προσαρμοσμένη σε έναν ταλαντωτή. Το δεξί μέρος της χορδής εκτείνεται μέχρι το Α του Κενταύρου. Την απόσταση του παραθύρου από τον ταλαντωτή δεν μπόρεσε ποτέ κανείς στον κόπο να την μετρήσει.

Ο ταλαντωτής έχει ένα μεταγωγό επιλογής συχνοτήτων και ένα δεύτερο μεταγωγό επιλογής συναρτήσεων ομαλοποίησης $g(t)$.

Την Παρασκευή την 5^η ώρα είχα μάθημα με την θετική κατεύθυνση.

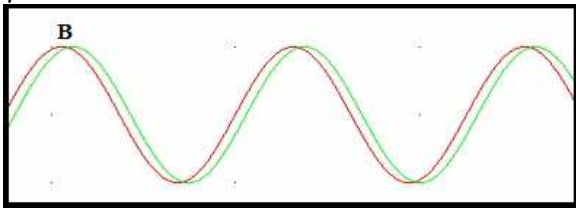
Το πρωί που πήγα στο σχολείο φώναξα τον Θανάση και του είπα το εξής:

Κάποια στιγμή στο διάλειμμα βάλτε σε λειτουργία την συσκευή ώστε να μην καθυστερήσουμε στο μάθημα. Μπορείτε να επιλέξετε όποια συχνότητα και όποια συνάρτηση ομαλοποίησης θέλετε.

Μπαίνοντας για μάθημα την 5^η ώρα διαπιστώσαμε ότι ο Θανάσης ήταν απών λόγω ξαφνικής αδιαθεσίας.

Παρά το γεγονός ότι δεν γνωρίζαμε τις επιλογές του Θανάση αποφασίσαμε να συνεχίσουμε το πείραμα.

Με μια ψηφιακή κάμερα φωτογραφίσαμε το σκοινί δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές που απέχουν κατά γνωστό Δt .



Πρώτο στιγμιότυπο είναι το κόκκινο και μεταγενέστερο το πράσινο.

Με ένα πρόγραμμα ψηφιακής επεξεργασίας εικόνας και το mathematica επιβεβαιώσαμε ότι οι κόκκινη γραφική παράσταση είναι ημιτονοειδής καμπύλη.

Συμπεράσματα

Το μέτωπο του κύματος βρίσκεται κάπου δεξιά από το παράθυρο και μάλιστα σε απόσταση μεγαλύτερη από λ .

Από το στιγμιότυπο μπορέσαμε να μετρήσουμε το μήκος κύματος.

Από την μετατόπιση ενός σημείου που στην κόκκινη καμπύλη στο χρονικό διάστημα Δt και γνωρίζοντας τις επιλογές που είχε ο Θανάσης μπορέσαμε να υπολογίσουμε τις δυνατές συχνότητες.

Ευτυχώς το αποτέλεσμα ήταν μοναδικό.

Θέτοντας $t=0$ την στιγμή που πάρθηκε το κόκκινο στιγμιότυπο και $x=0$ στο σημείο B ζητάμε να γράψουμε την εξίσωση κίνησης των σημείων της χορδής που βρίσκονται στο παράθυρο για $t>0$.