

Ενέργεια σώματος ή ενέργεια αλληλεπίδρασης;

Καλημέρα συνάδελφοι

Νομίζω ότι κατ' αρχάς θα πρέπει να συμφωνήσουμε ότι η α.α.τ. δεν έχει κανένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό ώστε να χρήζει ειδικού τρόπου χειρισμού.

Οποιαδήποτε μεθοδολογία ακολουθήσει κανείς στην α.α.τ. θα πρέπει να ακολουθήσει σε οποιαδήποτε άλλο φυσικό φαινόμενο ή έστω σε οποιαδήποτε άλλη ταλάντωση (αρμονική ή όχι).

Νομίζω ότι στις 32 σελίδες που προηγήθηκαν έγινε μια σύγχυση μεταξύ των εννοιών ενέργεια υποθέματος και ενέργεια συστήματος.

Το τελευταίο πρόβλημα που με απασχολεί είναι η ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή.

Έχοντας στην διάθεσή μου ένα υλικό σημείο που η συνισταμένη των ασκουμένων δυνάμεων είναι $-Dx$ ορίζω ως ρενέγνεια ταλαντωτή την ποσότητα $\frac{1}{2} D x^2 + \frac{1}{2} m v^2$ διαπιστώνω ότι είναι σταθερή και κάνω την δουλειά μου. Η σχέση της ρενέγνειας με την ενέργεια είναι που με προβληματίζει.

Θα προσπαθήσω λοιπόν να παρουσιάσω την ενεργειακή μελέτη των φαινομένων στην κλασική μηχανική όπως την έχω καταλάβει προσωπικά.

Συνειδητά στα περισσότερα παραδείγματά μου δεν θα βάλω ελατήρια, διότι επί της ουσίας αυτά αποτελούν το μήλο της έριδος.

Είμαι ο τελευταίος που θα διαφωνήσει με την φράση

«Δεν υφίσταται ενέργεια σώματος, αλλά ενέργεια αλληλεπίδρασης»

Αυτό το «ενέργεια αλληλεπίδρασης» συνειδητά το αφήνω προς το παρόν ασαφές.

1. Δυναμική ενέργεια σώματος που κινείται σε πεδίο ή δυναμική ενέργεια συστήματος;

Είναι κοινότοπο να πω ότι πολλές φορές είναι χρήσιμο και βολικό να θεωρήσουμε την κίνηση ενός σώματος σε ένα «θεόσταλτο πεδίο» Στην περίπτωση αυτή την ενέργεια του ... (βάλτε ότι θέλετε προς το παρόν στα αποσιωπητικά) την αποδίδουμε στο σώμα.

Παράδειγμα 1

Αφήνουμε ένα μια πέτρα να πέσει στο πεδίο βαρύτητας της γης από ύψος $h=R_T$ (λάθος έκφραση;).

Ζητάμε να βρούμε την ταχύτητά της όταν φτάνει στην επιφάνεια της γης.

Λύση

Την κίνηση της πέτρας μπορούμε να την μελετήσουμε με δύο τρόπους

1^{ος} τρόπος :

Η γη δημιουργεί ένα πεδίο βαρύτητας μέσα στο οποίο κινείται η πέτρα.

Θεωρώντας ότι η δυναμική ενέργειας της πέτρας είναι μηδέν όταν βρίσκεται σε άπειρη απόσταση από την γη, η αρχική δυναμική ενέργεια της πέτρας είναι $-\frac{1}{2} g_0 R$, και η τελική $-g_0 R$. Η συνέχεια γνωστή.

2^{ος} τρόπος '

Η γη αλληλεπιδρά με την πέτρα με δύναμη από απόσταση. Θεωρώντας ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι μηδέν όταν η σχετική τους απόσταση είναι άπειρη, η αρχική δυναμική ενέργεια του

συστήματος είναι $-G \frac{Mm}{2R_T}$ και η τελική $-G \frac{Mm}{R_T}$.

Επειδή η γη παραμένει πρακτικά ακίνητη, η ελάττωση της δυναμικής ενέργειας του συστήματος είναι ίση με την κινητική ενέργεια που θα αποκτήσει η πέτρα κ.τ.λ. ■

Μέχρι εδώ όλα καλά.

Παράδειγμα 2

Αφήνουμε δύο πέτρες να πέσουν στο πεδίο βαρύτητας της γης η μία από ύψος $h_1=R_T$ και η άλλη από ύψος $h_2=2R_T$. Ζητάμε να βρούμε τις ταχύτητές τους την στιγμή που η πρώτη φτάνει στην επιφάνεια της γης.

Υιοθετώντας την λογική σώμα κινείται σε πεδίο τα πράγματα είναι εννοιολογικά απλά.

Αν υιοθετήσουμε την δεύτερη λογική μελέτης τότε το πρόβλημα περιπλέκεται.

Το σύστημά μας αποτελείται από τρία σώματα.

Κανονικά πρέπει να γράψουμε τις εξισώσεις που ισχύουν για το σύστημα των τριών σωμάτων και σε επίπεδο λύσης ή σε επίπεδο εξισώσεων να κάνουμε την προσέγγιση ότι $\frac{m}{M_T} \rightarrow 0$.

Προσωπικά δεν ξέρω να υλοποιήσω αυτήν την διαδικασία με κλασσικά εργαλεία.

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι υπό προϋποθέσεις η λογική «σώμα κινείται σε πεδίο» μπορεί και να υπερτερεί της λογικής δύο ή τρία σώματα αλληλεπιδρούν.

Παράδειγμα 3

Ο κύλινδρος του σχήματος αποτελείται από υλικό πυκνότητας d_k έχει εμβαδόν διατομής A ύψος h .

Ο κύλινδρος συγκρατείται ακίνητος όπως στο σχήμα και το υγρό έχει πυκνότητα $d_v > d_k$.

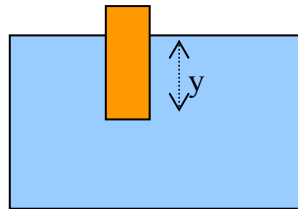
Να βρεθεί η θέση στην οποία ο κύλινδρος θα ηρεμήσει στιγμιαία.

Να μην ληφθεί υπόψη η αλλαγή της στάθμης του υγρού λόγω της κίνησης του κυλίνδρου και τα κυματικά φαινόμενα στο υγρό.

Λύση

Θεωρούμε ένα κατακόρυφο άξονα με αρχή την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού και θετικό ημιάξονα ομόρροπο της επιτάχυνσης της βαρύτητας.

Θεωρούμε ως γενικευμένη συντεταγμένη για την θέση του κυλίνδρου, την τεταγμένη y του κάτω άκρου του.



Το σύνθετο πεδίο μέσα στο οποίο κινείται ο κύλινδρος για $y \leq h$ είναι:

$$F(y) = \begin{cases} gA(d_k h - d_v y) & y \geq 0 \\ gA d_k h & y < 0 \end{cases}$$

Για την δυναμική ενέργεια του κυλίνδρου ισχύει ότι:

$$U'(y) = -F(y) = \begin{cases} gA(d_v y - d_k h) & y \geq 0 \\ -gA d_k h & y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$U(y) = \begin{cases} gA \left(\frac{1}{2} d_v y^2 - d_k h y \right) + c_1 & y \geq 0 \\ -gA d_k h y + c_2 & y < 0 \end{cases}$$

Η δυναμική ενέργεια είναι συνεχής συνάρτηση. Επομένως $c_1 = c_2 = c$.

Στην αρχική θέση του σώματος $y_1 = h$ και $K = 0$.

Επομένως στην θέση που θα μηδενιστεί στιγμιαία η ταχύτητα ισχύει ότι:

$$U(y_2) = U(y_1).$$

Έστω ότι $y_2 > 0$. Επομένως

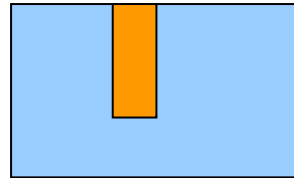
$$U(y_2) = U(h) \Leftrightarrow gA \left(\frac{1}{2} d_v y_2^2 - d_k h y_2 \right) + c = gA \left(\frac{1}{2} d_v h^2 - d_k h^2 \right) + c \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} d_v (y_2 + h)(y_2 - h) = d_k h (y_2 - h) \Leftrightarrow \frac{1}{2} d_v (y_2 + h) = d_k h \Leftrightarrow y_2 = \left(\frac{2d_k}{d_v} - 1 \right) h$$

$$\text{Επειδή } d_k < d_v \text{ ισχύει ότι } \left(\frac{2d_k}{d_v} - 1 \right) h < h$$

$$\text{Ισχύει η ισοδυναμία } \left(\frac{2d_k}{d_v} - 1 \right) h > 0 \Leftrightarrow d_v < 2d_k$$

Έστω ότι $y_2 < 0$



$$U(y_2) = U(0) \Leftrightarrow -gA d_k h y_2 + c = gA \left(\frac{1}{2} d_v h^2 - d_k h^2 \right) + c \Leftrightarrow$$

$$-d_k y_2 = \left(\frac{1}{2} d_v - d_k \right) h \Leftrightarrow y_2 = \left(1 - \frac{d_v}{2d_k} \right) h$$

$$\text{Ισχύει η ισοδυναμία } \left(1 - \frac{d_v}{2d_k} \right) h < 0 \Leftrightarrow d_v > 2d_k$$

Επομένως αν $d_v < 2d_k$ τότε ο κύλινδρος θα ηρεμήσει στιγμιαία βυθισμένος ων κατά $\left(\frac{2d_k}{d_v} - 1 \right) h$.

Αν $d_v > 2d_k$ τότε ο κύλινδρος θα βγει έξω από το νερό και η κάτω βάση του θα απέχει από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού κατά $\left(1 - \frac{d_v}{2d_k} \right) h$.

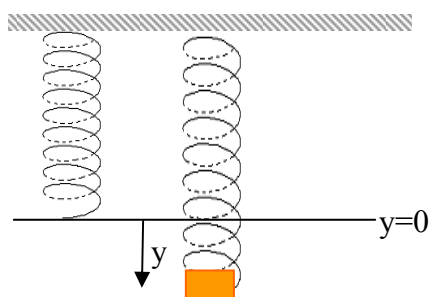
Θεωρώ ότι θα ήταν έως θρησκοληψία η αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος υιοθετώντας την λογική «σώματα που αλληλεπιδρούν».

Τα τρία σώματα που αλληλεπιδρούν είναι ο κύλινδρος, η γη και το νερό.

Για να μελετήσουμε ενεργειακά το παραπάνω σύστημα θα πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι καθώς ο κύλινδρος ανεβαίνει (με αποτέλεσμα να αυξηθεί η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος γη – κύλινδρος) μια ποσότητα νερού κατεβαίνει (χωρίς να αποκτήσει κινητική ενέργεια) με αποτέλεσμα να ελαττωθεί η δυναμική ενέργεια του συστήματος γη – νερό. ■

Παράδειγμα 4

Σώμα δεμένο σε κατακόρυφο ελατήριο



Θέτουμε $y=0$ στην θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και τον θετικό ημιάξονα προς τα κάτω.

Η συνολική δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι:

$$F(y) = -ky + mg$$

Για την δυναμική ενέργεια του σώματος στο σύνθετο πεδίο ισχύει ότι:

$$U'(y) = -F(y) \Leftrightarrow U'(y) = ky - mg \Leftrightarrow U(y) = \frac{1}{2}ky^2 - mgy + c$$

Μετακινούμε τον άξονα κατά $\frac{mg}{k}$ προς τα κάτω ορίζοντας νέα τεταγμένη $\tilde{y} = y - \frac{mg}{k}$.

Η δυναμική ενέργεια γίνεται:

$$\tilde{U}(\tilde{y}) = \frac{1}{2}k\left(\tilde{y} + \frac{mg}{k}\right)^2 - mg\left(\tilde{y} + \frac{mg}{k}\right) + c = \frac{1}{2}k\tilde{y}^2 - \frac{m^2g^2}{2k} + c$$

$$\text{Αν επιλέξουμε } c = \frac{m^2g^2}{2k} \text{ τότε } \tilde{U}(\tilde{y}) = \frac{1}{2}k\tilde{y}^2$$

Δια πιστώνουμε ότι με κατάλληλη επιλογή της αρχής του συστήματος αναφοράς και κατάλληλη επιλογή της σταθεράς c , η δυναμική ρενέργεια του ταλαντωτή ταυτίζεται με την δυναμική ενέργεια του σώματος στο σύνθετο πεδίο. ■

Παράδειγμα 5

Δύο μικρές σφαίρες αποτελούμενες από μονωτικό υλικό είναι ομοιόμορφα φορτισμένες με θετικά φορτία q_A και q_B . Η σφαίρα B συγκρατείται σε απόσταση r_1 από την σφαίρα A τέτοια ώστε η απωστική δύναμη Coulomb να είναι μεγαλύτερη από το βάρος της σφαίρας B. Αφήνουμε την σφαίρα B ελεύθερη να κινηθεί.

Να βρεθεί το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει.

Λύση

Υιοθετούμε την λογική «σώμα σε κινείται σε πεδίο»

Θεωρούμε έναν κατακόρυφο άξονα με αρχή τη σφαίρα A και θετική φορά προς τα πάνω.

Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται η σφαίρα B δίνεται από την σχέση

$$F(y) = K_c \frac{q_A q_B}{y^2} - mg$$

Για την δυναμική ενέργεια της σφαίρας B στο σύνθετο πεδίο ισχύει ότι:

$$U'(y) = -F(y) \Leftrightarrow U(y) = K_c \frac{q_A q_B}{y} + mgy + c$$

Για την αρχική και τελική θέση ισχύει ότι $K_1 = K_2 = 0$. Επομένως

$$U(y_1) = U(y_2) \Rightarrow K_c \frac{q_A q_B}{y_1} + mgy_1 + c = K_c \frac{q_A q_B}{y_2} + mgy_2 + c \Rightarrow K_c \frac{q_A q_B}{y_1 y_2} = mg \Rightarrow \dots \blacksquare$$

Θεωρώ ότι δεν μπορούμε να πατάμε σε δύο βάρκες.

Αν υιοθετήσουμε την λογική σώμα κινείται σε δοθέν πεδίο, τότε θα πρέπει να αγνοήσουμε τις πηγές του πεδίου και να εστιάσουμε στο σώμα και στις δυνάμεις που δέχεται.

2. Όταν η έννοια ενέργεια συστήματος είναι επιβεβλημένη

Ας υποθέσουμε ότι η φύση του προβλήματος είναι τέτοια ώστε να μας υποχρεώνει να εγκαταλείψουμε την λογική «σώμα κινείται σε πεδίο».

Ακόμη και σε αυτήν την περίπτωση υπάρχουν προβλήματα που στην μελέτη μας αφήνουμε κάποιες ενέργειες εκτός παιχνιδιού.

Αυτό φαίνεται καθαρά στο επόμενο

Παράδειγμα 6

Δύο σφαίρες A και B ακτίνων R_A και R_B αποτελούμενες από μονωτικό υλικό είναι ομοιόμορφα φορτισμένες με θετικά φορτία q_A και q_B . Οι σφαίρες συγκρατούνται ακίνητες (ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ) μα σε απόσταση r_1 .

Αφήνουμε ταυτόχρονα τις σφαίρες ελεύθερες να κινηθούν.

Να βρεθούν οι ταχύτητές τους (ως προς το Σ) όταν η απόστασή τους θα γίνει r_2 .

Θεωρήστε ότι στις σφαίρες δεν ασκείται καμιά άλλη δύναμη εκτός από την δύναμη ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης. Θεωρήστε επίσης αμελητέα την αμοιβαία βαρυτική τους έλξη και τα φαινόμενα ακτινοβολίας.

1^η λύση

Οι δύο σφαίρες αλληλεπιδρούν με μια δύναμη Coulomb $F = K_c \frac{q_A q_B}{r^2}$.

Επειδή ... το σύστημα των δύο σφαιρών έχει δυναμική ενέργεια $U = K_c \frac{q_A q_B}{r}$

Επειδή ... η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Συνεπώς...

$$K_c \frac{q_A q_B}{r_1} = K_c \frac{q_A q_B}{r_2} + \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

Επειδή .. η ορμή του συστήματος διατηρείται.....

2^η Λύση

Οι δύο συνεχείς κατανομές φορτίου αρχικά δημιουργούν ένα ηλεκτρικό πεδίο.

● B



Η ενέργεια του πεδίου είναι $U_E = K_c \frac{q_A q_B}{r} + \frac{3}{5} K_c \frac{q_A^2}{R_A} + \frac{3}{5} K_c \frac{q_B^2}{R_B}$

Αφήνοντας τις σφαίρες ελεύθερες να κινηθούν δημιουργείται ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ενέργειας Επειδή τα φαινόμενα ακτινοβολίας είναι αμελητέα μπορούμε να υιοθετήσουμε στατική προσέγγιση, θεωρώντας ότι ακόμη και όταν οι σφαίρες είναι εν κινήσει, η ενέργεια του πεδίου υπολογίζεται από την παραπάνω σχέση.

Αγνοώντας την ορμή του πεδίου μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών είναι σταθερή.

Επομένως

$$K_c \frac{q_A q_B}{r_1} + \frac{3}{5} K_c \frac{q_A^2}{R_A} + \frac{3}{5} K_c \frac{q_B^2}{R_B} = K_c \frac{q_A q_B}{r_2} + \frac{3}{5} K_c \frac{q_A^2}{R_A} + \frac{3}{5} K_c \frac{q_B^2}{R_B} + \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2. \blacksquare$$

Σχόλια

1) Από τις λύσεις που δόθηκαν σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα, μόνο η τελευταία απαντά στο ερώτημα «που βρίσκεται αποθηκευμένη η δυναμική ενέργεια;».

Αυτό που ονομάζουμε δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης είναι ενέργεια πεδίου.

Όπως η ενέργεια που δαπανήσαμε για να φορτίσουμε ένα πυκνωτή δεν αποθηκεύεται στους ολισμούς του πυκνωτή αλλά στο ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ τους, έτσι και η ενέργεια που δαπανάμε για να πλησιάσουμε δύο φορτισμένα σώματα δεν αποθηκεύεται στα σώματα αλλά στο πεδίο.

Το πεδίο δεν είναι ο χώροςαλλά **μορφή ύπαρξης της ύλης**.

Έχει ενέργεια, ορμή, στροφορμή.

2) Συνδέοντας τα παραπάνω με την α.α.τ. και την διδασκαλία μας αναρωτιέμαι:

Διδάσκοντας την α.α.τ. μελετάμε ένα σώμα που κινείται σε δοθέν πεδίο ή την αλληλεπίδραση 2, 3 ή δεν ξέρω πόσων σωμάτων;

3) Υπάρχει κάποιος ουσιαστικός λόγος να μελετήσουμε το παράδειγμα 3 υιοθετώντας την λογική σώματα που αλληλεπιδρούν;

4) Ορίζεται σε κάποιο βιβλίο θεωρητικής μηχανικής η έννοια ενέργεια ταλαντωτή;

Η περίπτωση των ελατηρίων

Θα μου επιτρέψετε να ακολουθήσω αντίστροφο συλλογισμό.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ελατήριο σταθεράς k αποτελούμενο από 50 σπείρες μάζας 20gr εκάστη. Συσπειρώνουμε το ελατήριο κατά $\Delta \ell_0$ και την στιγμή $t=0$ το αφήνουμε ελεύθερο.

Να μελετηθεί η κίνηση της 5^{ης} σπείρας.

Ακόμη χειρότερα θα είναι τα πράγματα αν στα δύο άκρα του συνδέσουμε δύο σώματα μαζών 1Kg και 2Kg.

Έχουμε να μελετήσουμε 52 σώματα που αλληλεπιδρούν.

Για την μελέτη του παραπάνω συστήματος δεν απαιτείται θεώρηση σε ατομικό επίπεδο.

Η θεωρία ελαστικότητας, η οποία είναι μακροσκοπική θεωρία, μπορεί να δώσει απάντηση.

Χωρίς να ξέρω θεωρία ελαστικότητας εικάζω ότι η σταθερά k του ελατηρίου είναι ανεπαρκής για να υπολογίσει την πυκνότητα δυναμικής ενέργειας κατά μήκος των σπειρών.

Η συνολική δυναμική ενέργεια αμφιβάλλω αν θα δίνεται σε κάθε χρονική στιγμή από την σχέση $\frac{1}{2} k \Delta \ell^2$.

Για να μελετήσουμε την αλληλεπίδραση των σπειρών θα πρέπει να γράψουμε τους όρους ενέργειας αλληλεπίδρασης διαδοχικών σπειρών.

Μπορούμε να σωθούμε από την παραπάνω ανάγκη θεωρώντας ελατήριο αμελητέας μάζας;

Νομίζω πως όχι. Πάλι χρειαζόμαστε την ενέργεια αλληλεπίδρασης.

Προφανώς θα αναρωτηθεί κάποιος:

Δηλαδή δεν μπορούμε να μελετήσουμε την κίνηση ενός σώματος που είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου;

Η απάντηση είναι καταφατική.

Ναι αν υιοθετήσουμε την λογική σώμα κινείται σε πεδίο δύναμης.

Όταν το ελατήριο έχει αμελητέα μάζα σε σχέση με το σώμα τότε η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σώμα μπορεί με ικανοποιητική προσέγγιση να αποδοθεί από το πεδίο $-k\Delta\ell$.

Η ενέργεια $\frac{1}{2} k \Delta\ell^2$ είναι ενέργεια σώματος που κινείται σε πεδίο.

Ας υιοθετήσω προς στιγμήν την λογική ότι σε ένα οριζόντιο ελατήριο η κινητική ενέργεια που χάνει το σώμα αποθηκεύεται στο ελατήριο.

Τότε στα παραδείγματα 3 και 5 θα πρέπει να απαντήσω στον μαθητή στο ίδιο ερώτημα.

Να πούμε δηλαδή ότι η κινητική ενέργεια που χάνει το σώμα προκαλεί αύξηση της ενέργειας του πεδίου βαρύτητας κατά τόσο και αύξηση της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου κατά τόσο.

Ή θα απαντάμε πάντα στο ερώτημα «που αποθηκεύεται η ενέργεια;» ή ποτέ.

Θεωρώ τα παραδείγματα 3 και 5 με την προσθήκη ελατηρίου.

Εκεί τα πράγματα σοβαρεύουν ακόμη περισσότερο.

Προσωπικά δεν ξέρω τι γίνεται. Συσπειρώνοντας ένα πραγματικό ελατήριο κατά $\Delta\ell$ η ενέργεια που πρόσφερα αύξησε την ενέργεια κάποιου πεδίου.

Μπορεί να απαντήσει κάποιος στα σοβαρά στο ερώτημα:

«που πήγε η κινητική προσφερόμενη ενέργεια;»

Σε μια συζήτηση που είχαμε παλαιότερα σε παρεμφερές θέμα έθεσα στον Θρασύβουλο το ερώτημα:

Και πως μελετάμε δύο σώματα δεμένα στα άκρα ενός ελατηρίου;

Η απάντηση του Θρασύβουλου με την οποία συμφωνώ απόλυτα ήταν η εξής.

Όπως μελετάμε δύο φορτία που είναι ελεύθερα να κινηθούν και τα δύο

Στην περίπτωση των φορτίων η δύναμη αλληλεπίδρασης είναι $K_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$ ορίζοντας μια δυναμική ενέργεια

του συστήματος $K_e \frac{q_1 q_2}{r} + c$.

Στην περίπτωση του ελατηρίου μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα δύο σώματα αλληλεπιδρούν με μια δύναμη $k\Delta\ell$ ορίζοντας μια δυναμική ενέργεια του συστήματος $\frac{1}{2} k\Delta\ell^2$.

Όπως το πρόβλημα «κίνηση σώματος δεμένο σε ελατήριο» προσεγγίζεται από το μοντέλο σώμα κινείται σε πεδίο $-kx$, έτσι και το πρόβλημα «εξέλιξη συστήματος αποτελούμενο από δύο σώματα και ελατήριο» προσεγγίζεται από το μοντέλο δύο σώματα αλληλεπιδρούν με δύναμη $k\Delta\ell$.

korfiatis@sch.gr