

Κυκλική κίνηση και ταλάντωση

Σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1\text{Kg}$ είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε κατακόρυφο άξονα που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές. Το σώμα κάνει ομαλή κυκλική κίνηση πάνω στο λείο δάπεδο. Αν η σταθερά του ελατηρίου είναι $k = 100\text{ N/m}$, η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς (απόσταση από το κέντρο του άξονα μέχρι το άκρο του ελατηρίου στο οποίο είναι στερεωμένο το σώμα, το οποίο θεωρούμε πως είναι υλικό σημείο) είναι $R = 1,5\text{m}$ και η ταχύτητα του σώματος $v_1 = 5\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ να βρεθεί:

A₁. το μήκος από το κέντρο του άξονα μέχρι το άκρο του ελατηρίου, όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

A₂. η ενέργεια που απαιτήθηκε προκειμένου να τεθεί σε κίνηση το Σ_1 .

B. Κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος Σ_1 τοποθετούμε σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 1\text{Kg}$ σε κάποιο σημείο της τροχιάς του Σ_1 με μηδενική ταχύτητα. Η κρούση μεταξύ των σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική. Πόσο θα απέχουν τα σώματα Σ_1 , Σ_2 $0,1\pi$ s μετά την κρούση; (θεωρήστε $\pi^2 = 10$)

Γ. Αν τη χρονική στιγμή $t = \frac{4\pi}{450}\text{ s}$ (θεωρούμε $t = 0$ τη στιγμή της κρούσης) συγκρούεται με το σώμα Σ_1 σώμα Σ_3 με μάζα $m_3 = 1\text{Kg}$ και $v_3 = 11\text{m/s}$ έτσι ώστε, αμέσως μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα των Σ_1 και Σ_3 να κάνει ομαλή κυκλική κίνηση, να βρείτε :

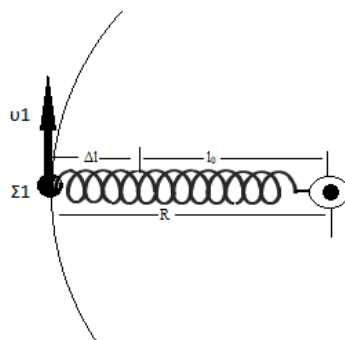
Γ₁. την απώλεια μηχανικής ενέργειας λόγω της πλαστικής κρούσης των Σ_1 και Σ_2 .

Γ₂. τη γωνία φ (ημφ ή συνφ) που σχηματίζει η $\vec{v}_3$ με τον άξονα του ελατηρίου.

(Δίνεται $\eta\mu\frac{53\pi}{90} = 0,8$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{53\pi}{90} = 0,6$)

Λύση

A₁. Επειδή το σώμα κάνει ομαλή κυκλική κίνηση η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά προς το κέντρο του κύκλου και μέτρο που ισούται με $\frac{m_1 v_1^2}{R}$ (κεντρομόλος δύναμη).



$$\Sigma F_R = \frac{m_1 v_1^2}{R} \Rightarrow k \Delta l = \frac{m_1 v_1^2}{R} \Rightarrow \Delta l = \frac{m_1 v_1^2}{Rk}$$

$$\Delta l = \frac{1Kg \cdot 75 \frac{m^2}{s^2}}{100 \frac{N}{m} \cdot 1,5m} = 0,5m$$

$$R = \Delta l + l_0 \Rightarrow l_0 = R - \Delta l = 1,5m - 0,5m = 1m$$

- A₂.** Η μηχανική ενέργεια που έχει το σώμα κατά τη διάρκεια της κίνησης του είναι και η ενέργεια που προσφέρθηκε στο σώμα για να ξεκινήσει την κίνηση του.

$$E_{MHX} = K + U$$

$$E_{MHX} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k \Delta l^2$$

$$E_{MHX} = \frac{1}{2} 1Kg \cdot 75 \frac{m^2}{s^2} + \frac{1}{2} 100 \frac{N}{m} \cdot \frac{1}{4} m^2$$

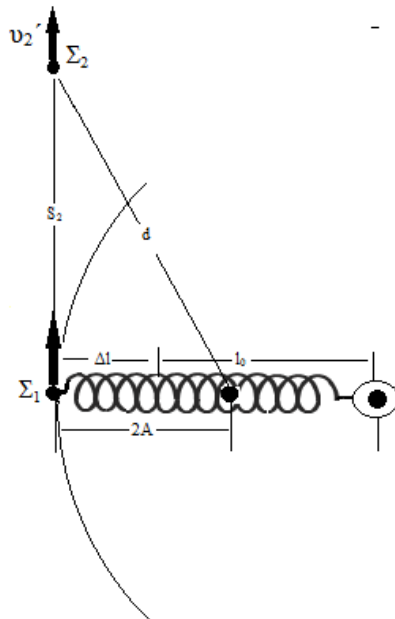
$$E_{MHX} = 37,5J + 12,5J$$

$$E_{MHX} = 50J$$

- B.** Επειδή η κρούση των Σ_1 και Σ_2 είναι κεντρική ελαστική και οι μάζες των σωμάτων ίσες θα συμβεί ανταλλαγή ταχυτήτων. Οπότε $v'_1 = 0$ και $v'_2 = 5\sqrt{3} \frac{m}{s}$ με διεύθυνση εφαπτόμενη της τροχιάς του Σ_1 στο σημείο της κρούσης. Το Σ_1 μετά την κρούση εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A = \Delta l = 0,5m$ και $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10 \frac{rad}{s}$. Παρατηρούμε ότι $0,1\pi s = \frac{T}{2}$, αφού $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,2\pi s$. Άρα το Σ_1 βρίσκεται στην ακραία θέση του που βρίσκεται πλησιέστερα στον άξονα του ελατηρίου.

Το Σ_2 κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με $v'_2 = 5\sqrt{3} \frac{m}{s}$. Άρα:

$$S_2 = v'_2 \cdot t = 5\sqrt{3} \frac{m}{s} \cdot 0,1\pi s = 0,5\pi\sqrt{3}m$$



Από το σχήμα προκύπτει: $d^2 = S_2^2 + (2A)^2$

$$d^2 = \frac{1}{4}\pi^2 3 \text{ m}^2 + 4\frac{1}{4} \text{ m}^2$$

$$d = 8,5\text{m}$$

- Γ1.** Αφού το συσσωμάτωμα κάνει ομαλή κυκλική κίνηση αμέσως μετά την κρούση, συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα του συσσωματώματος είναι κάθετη στον άξονα του ελατηρίου και το μέτρο της ικανοποιεί τη σχέση της κεντρομόλου δύναμης :

$$\Sigma F_R = \frac{(m_1 + m_2)v_\sigma^2}{R}$$

$$k \cdot \Delta l' = \frac{(m_1 + m_3)v_\sigma^2}{R} \quad (1)$$

Το $\Delta l'$ ισούται με το μέτρο της απομάκρυνσης τη χρονική στιγμή $t = \frac{4\pi}{450} \text{ s}$ και το R με $\Delta l' + l_0$. Για την ταλάντωση του Σ1 θεωρούμε: $t = 0, x = +A, v = 0$ με αρχή μέτρησης του χρόνου τη στιγμή της κρούσης. Άρα:

$$x = 0,5\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (S.I.)$$

$$\text{για } t = \frac{4\pi}{450} \text{ s έχουμε: } x = 0,5\eta\mu\left(\frac{4\pi}{45} + \frac{\pi}{2}\right) = 0,5\eta\mu\left(\frac{53\pi}{905}\right) = 0,4\text{m}$$

$$\text{επίσης } v = 5\sigma\upsilon\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (S.I.), \text{ οπότε για } t = \frac{4\pi}{450} \text{ s είναι}$$

$$v_1 = 5\sigma v \left(\frac{4\pi}{45} + \frac{\pi}{2} \right) = 5\sigma v \left(\frac{53\pi}{905} \right) = 3 \frac{m}{s}$$

Η σχέση (1) δίνει: $k \cdot \Delta l' = \frac{(m_1 + m_2)v_\sigma^2}{R}$

$$v_\sigma^2 = \frac{k \cdot \Delta l' \cdot R}{(m_1 + m_3)} = \frac{100 \frac{N}{m} \cdot 0,4m \cdot 1,4m}{2Kg}$$

$$v_\sigma = 2\sqrt{7} \frac{m}{s}$$

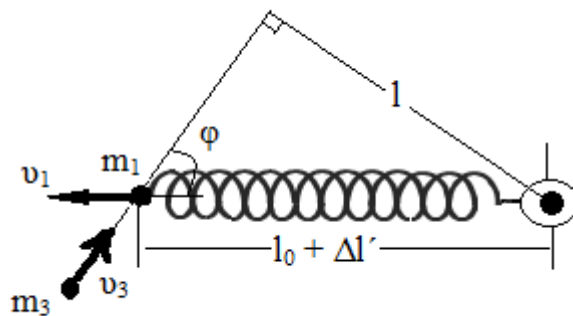
$$|\Delta E_{MHX}| = |\Delta K| = |K_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} - K_{\pi\rho\iota\nu}| = \left| \frac{1}{2}(m_1 + m_3)v_\sigma^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 \right| = 23,5J$$

Γ₂. Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής για τη κρούση έχουμε:

$$L_{\pi\rho\iota\nu} = L_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}}$$

$$m_3v_3l = (m_1 + m_3)v_\sigma(\Delta l' + l_0)$$

Όπου l η απόσταση του φορέα της ταχύτητας v_3 από τον άξονα περιστροφής.



Από το σχήμα προκύπτει $\eta\mu\phi = \frac{l}{\Delta l' + l_0}$ οπότε:

$$m_3v_3\eta\mu\phi(\Delta l' + l_0) = (m_1 + m_3)v_\sigma(\Delta l' + l_0)$$

$$\eta\mu\phi = \frac{(m_1 + m_3)v_\sigma}{m_3v_3}$$

$$\eta\mu\phi = \frac{4\sqrt{7}}{11}$$

Αλωνιστιώτης Δημήτρης

dalonistiotis@yahoo.gr