

Κύμα με αρχική φάση.

Σημειακό σώμα μάζας $m_1=1\text{kg}$ είναι δεμένο σε κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $K=100\text{N/m}$ και ισορροπεί. Ανεβάζουμε το σώμα κατακόρυφα ώστε το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος. Στο σημειακό σώμα στερεώνουμε οριζόντια αβαρής ελαστική χορδή μεγάλου μήκους πάνω στην οποία μπορεί να διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα με ταχύτητα $V=1/\pi \text{ m/s}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Την χρονική στιγμή $t=0$ αφήνουμε το σώμα ελεύθερο ενώ η χορδή ισορροπεί οριζόντια. Να βρεθούν:

- α) Η εξίσωση του κύματος που θα διαδοθεί στην ελαστική χορδή θεωρώντας θετική φορά τη φορά προς τα πάνω.
- β) Ποια η ελάχιστη και ποια η μέγιστη απόσταση δύο σημείων της χορδής που παρουσιάζουν μεταξύ τους διαφορά φάσης $\pi \text{ rad}$.
- γ) Η μορφή της χορδής τη χρονική στιγμή που ενέργεια του ελατηρίου είναι μέγιστη για 3^η φορά.
- δ) Πόσα σημεία την παραπάνω χρονική στιγμή έχουν ταχύτητα μέτρου ίση με το μισό της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσής τους.

Να υποθεθεί ότι το πλάτος του κύματος παραμένει συνεχώς σταθερό.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- α) Από την ισορροπία του σημειακού σώματος $mg=Kx_1$ άρα $x_1=0,1\text{m}$

Την στιγμή $t=0$ το σώμα βρίσκεται σε θέση όπου δεν έχει ταχύτητα άρα το x_1 ισοδυναμεί με το πλάτος της ταλάντωσης του σημειακού σώματος.

Έτσι η εξίσωση της ταλάντωσης του σημειακού σώματος θα είναι

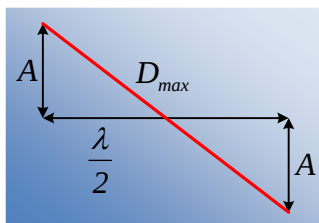
$$\psi_1=0,1\eta\mu(10t+\pi/2) \text{ (S.I.)}$$

Το σημειακό σώμα αποτελεί την πηγή του κύματος που θα διαδοθεί στην ελαστική χορδή. Έτσι από το νόμο της κυματικής $V=\lambda f$ άρα $\lambda=0,2\text{m}$

Η εξίσωση του αρμονικού κύματος που θα διαδοθεί στην ελαστική χορδή θα έχει μορφή

$$y = 0,1 \cdot \eta\mu \left(2\pi \left(\frac{5t}{\pi} - \frac{x}{0,2} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \quad (1) \quad \text{(S.I.)}$$

- β) Επειδή τα σημεία της χορδής που ταλαντώνονται με διαφορά φάσης π έχουν συνεχώς αντίθετες απομακρύνσεις και αντίθετες ταχύτητες η ελάχιστη τους απόσταση θα είναι όταν θα βρίσκονται στην θέση ισορροπίας τους και θα απέχουν απόσταση που θα βρεθεί από την σχέση $\Delta\phi = 2\pi\Delta x/\lambda$ άρα $\Delta x_{\min} = 0,1\text{m}$. Η μέγιστη απόσταση θα συμβεί όταν το ένα σημείο βρεθεί στην μέγιστη απομάκρυνση ενώ το άλλο θα βρεθεί στην ελάχιστη απομάκρυνση. Με τη βοήθεια του ΠΘ θα έχουμε



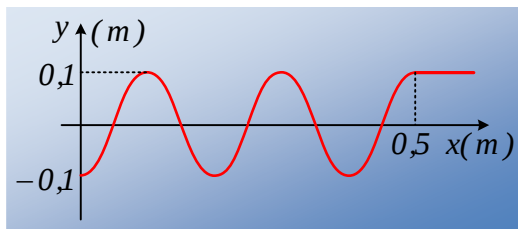
$$D_{\max} = \sqrt{(2A)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{10} m$$

- γ) Το ελατήριο αποκτάει μέγιστη δυναμική ενέργεια όταν το σημειακό σώμα βρίσκεται στην ελάχιστη απομάκρυνσή του. Αυτό θα συμβεί για τρίτη φορά σε χρόνο $t_1 = T/2 + 2T$. Ετσι το κύμα θα έχει διαδοθεί κατά $2,5\lambda$.

Η εξίσωση της χορδής θα είναι

$$y = 0,1 \cdot \eta\mu\left(2\pi\left(2,5 - \frac{x}{0,2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \quad 0 \leq x \leq 0,5 \text{ (SI)}$$

Ετσι η μορφή της χορδής θα είναι



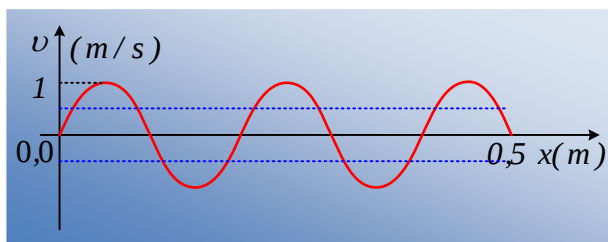
- δ) Παραγωγίζοντας την εξίσωση (1) θα βρούμε τη εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης των διαφόρων σημείων της χορδής

$$u_{\text{ταλ}} = \text{συν}\{2\pi(5t/\pi - x/0,2) + \pi/2\} \quad (\text{S.I})$$

και για την χρονική στιγμή $2,5T$ θα έχουμε

$$u_{\text{ταλ}} = \text{συν}\{2\pi(2,5 - x/0,2) + \pi/2\} \quad 0 \leq x \leq 0,5 \text{ (SI)}$$

άρα η γραφική παράσταση θα έχει μορφή



Απο το παραπάνω διάγραμμα παρατηρώ ότι 10 σημεία της χορδής έχουν ταχύτητα ταλάντωσης με μέτρο το μισό της μέγιστης τιμής τους.

xristoselef@gmail.com