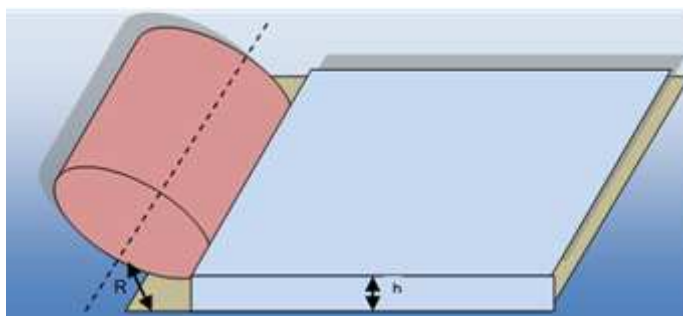


*Ελάχιστη δύναμη και ενέργεια για ν' ανέβει ο κύλινδρος
το σκαλοπάτι..*



Κύλινδρος συμπαγής μάζας $M=100\text{kg}$, ακτίνας $R=0,5\text{m}$ και ροπής αδράνειας $I_{\text{cm}}=\frac{1}{2}MR^2$ πρόκειται να ανεβεί σε σκαλοπάτι ύψους $h=0,2\text{m}$. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$. Η τριβή με την κόχη του σκαλοπατιού είναι αρκετή, ώστε να μην έχουμε ολίσθηση.

1. Ποια η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να δαπανήσουμε για να τον ανεβάσουμε.
2. Πόση είναι η ελάχιστη σταθερή, εφαπτομενική στον κύλινδρο, δύναμη, που πρέπει να ασκήσουμε με το κάθε χέρι μας, και σε ποια σημεία του κυλίνδρου, για να τον ανεβάσουμε.
3. Ποια η ελάχιστη γωνία στροφής, που πρέπει να ασκήσουμε τις δυνάμεις με τα χέρια μας, ώστε ο κύλινδρος να ανεβεί με μηδενική κινητική ενέργεια.
4. Ποιος ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας κατά την άνοδο και σε ποια θέση συμβαίνει αυτό.
5. Αν επαναλάβουμε, ασκώντας τις δυνάμεις των χεριών μας μέχρι ν' ανεβεί ο κύλινδρος και μετά πάψουμε να την ασκούμε, ποια η κινητική ενέργεια τη στιγμή που έχει ανεβεί.
6. Αμέσως μετά τη στιγμή που ανέβηκε ο κύλινδρος, ασκούμε με τις παλάμες μας πιέζοντας, ίσες δυνάμεις κατακόρυφες, στο ανώτερο σημείο του κυλίνδρου, και ο κύλινδρος σταματά μετά από 3m , κυλιόμενος. Τα χέρια μας ολισθαίνουνε πάνω στον κύλινδρο, μέχρι αυτός να σταματήσει.

α) Σε πόσο χρόνο σταματά

β) αν ο συντελεστής τριβής των χεριών μας με τον κύλινδρο είναι $\mu=0,8$, πόση είναι η κάθετη δύναμη που ασκούμε με κάθε χέρι μας, μέχρι να σταματήσει.

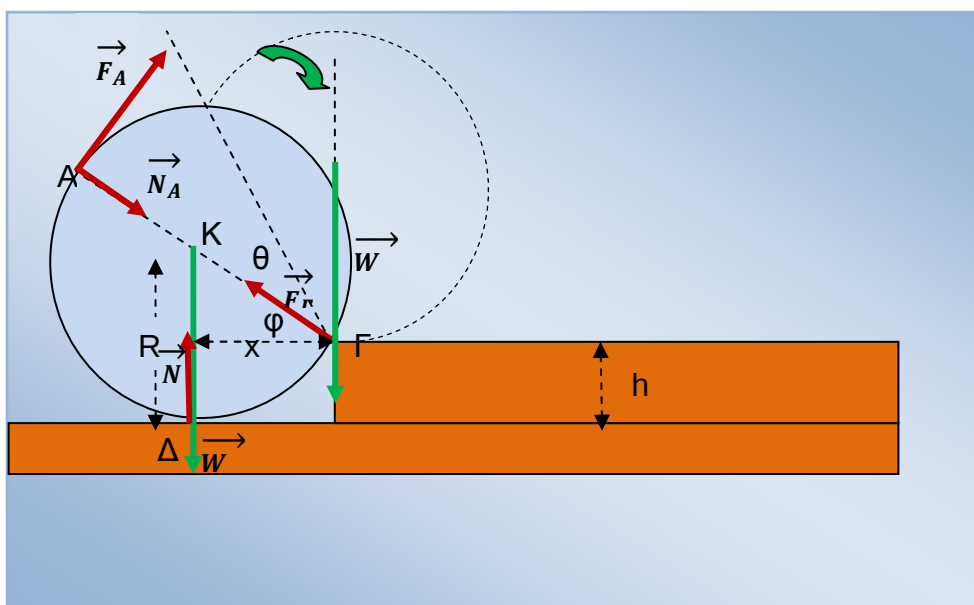
Δίνονται $\sin 37^\circ=0,8$, $\eta\mu 37^\circ=0,6$, $\sin 28,6^\circ=\sin 0,5\text{rad}=0,878$,
 $\sin 65,6^\circ=0,413$, $\eta\mu 65,6^\circ=0,91$, $65,6^\circ=1,145\text{rad}$, $37^\circ=0,645\text{rad}$

Απάντηση:

1. Η ελάχιστη ενέργεια που δαπανάται είναι όταν ο κύλινδρος ανεβεί το σκαλοπάτι με μηδενική κινητική ενέργεια. Άρα το έργο αυτό είναι ίσο με την αύξηση της δυναμικής ενέργειάς του. $W = mgh = 100 \cdot 10 \cdot 0,2 = 200 \text{ J}$.

2. Όταν ο κύλινδρος τείνει ν' ανέβει, δεν ακουμπά στο δάπεδο οπότε η κάθετη αντίδραση N είναι μηδέν.

Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω του είναι: το **βάρος W** , η δύναμη στην κόχη του σκαλοπατιού F_r , οι δυο εφαπτομενικές στον κύλινδρο δυνάμεις των χεριών μας με συνισταμένη F_A , που **ασκούνται συμμετρικά ως προς το κατακόρυφο επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας**, για να μην έχουμε οριζόντια περιστροφή, καθώς και η ακτινική δύναμη των χεριών μας με συνισταμένη N_A , έτσι ώστε να είναι ίσες μεταξύ τους.



Η ροπή του βάρους ως προς το Γ αρχικά είναι: $\tau_{W(\Gamma)} = -mgx = -mg\sqrt{R^2 - (R - h)^2} = -mg\sqrt{h(2R - h)} = -1000 \cdot \sqrt{0,2 \cdot (1 - 0,2)} = -400 \text{ Nm}$.

Οι ροπές των N_A και F_r ως προς το Γ είναι μηδέν, ως διερχόμενες (οι φορείς τους) από το Γ . Η ροπή της F_A ως προς το Γ είναι $\tau_{FA} = F_A \cdot d_\Gamma$. Για να ανεβεί ο κύλινδρος το σκαλοπάτι, πρέπει η συνολική ροπή ως προς το Γ να είναι μεγαλύτερη ή οριακά ίση με το μηδέν. $\Sigma \tau_\Gamma \geq 0 \quad F_A d_\Gamma - 400 \geq 0 \quad \text{ή} \quad F_A d_\Gamma \geq 400 \text{ Nm} \quad \text{ή} \quad F_{A,\min} d_{\Gamma,\max} \geq 400 \text{ Nm}$

Όμως η μεγαλύτερη απόσταση από το Γ είναι $2R$ ή $d_{\Gamma,\max} = 2R = 1 \text{ m}$ άρα **$F_{A,\min} = 400 \text{ N}$** και κάθε χέρι ασκεί εφαπτομενική ελάχιστη δύναμη **200 N**.

3. Το έργο της ροπής των δυνάμεων που ασκούμε με τα χέρια μας είναι ίσο κατ' απόλυτη τιμή, με το έργο του βάρους μέχρι να ανεβεί ο κύλινδρος το σκαλοπάτι με μηδενική κινητ. ενέργεια:

$$W = F_{A, \min} \cdot d_{r, \max} \cdot \theta_{\min} = 400 \cdot 1 \cdot \theta_{\min} = 200 \quad \text{ή} \quad \theta_{\min} = 0,5 \text{rad} = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{90^\circ}{\pi} = 28,6^\circ$$

$$4. \text{ Είναι } \frac{dK}{dt} = \frac{\sum_{(r)} \tau \cdot d\theta}{dt} = \sum_{(r)} \tau \cdot \omega = (F_A \cdot 2R - mg \cdot x_1) \cdot \omega \quad (1)$$

Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας συμβαίνει στο τέλος της επιταχυνόμενης στροφικά κίνησης του κυλίνδρου. Επειδή ο πολλαπλασιαστέος όρος $(F_A \cdot 2R - mg \cdot x_1)$ είναι διαρκώς θετικός, κι αυτό γιατί ο μοχλοβραχίονας x της ροπής του βάρους W ως προς το Γ , μειώνεται διαρκώς, ενώ ο όρος $F_A \cdot 2R$ μένει σταθερός, ο μέγιστος ρυθμός της κιν. ενέργ. θα συμβεί λίγο πριν καταργήσουμε την F_A , γιατί μέχρι τότε αυξάνονταν η γωνιακή ταχύτητα ω , κι αμέσως μετά, αρχίζει η επιβραδυνόμενη κίνησή του (κατάργηση της F_A).

$$\text{Είναι } \sin(\theta + \phi) = \frac{x_1}{R} \quad \text{ή} \quad x_1 = R \sin(\theta + \phi) \quad \text{όμως } \sin \phi = \frac{x}{R} = \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R} = \frac{0,4}{0,5} = 0,8 \quad \text{άρα}$$

$$\phi = 37^\circ = 0,645 \text{rad} \quad \text{και} \quad \phi + \theta = 65,6^\circ = 1,145 \text{rad}$$

$$x_1 = 0,5 \cdot \sin 65,6^\circ = 0,5 \cdot 0,913 = 0,2065 \text{m}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. μέχρι τη θέση κατάργησης της F_A κι έχουμε:

$$K_{\text{τελ.}} - K_{\alpha\rho\chi.} = W_{FA} + W_B \quad , \quad \frac{1}{2} I_A \omega^2 - 0 = F_A \cdot 2R \cdot (\phi + \theta) - mg[R\eta\mu(\phi + \theta) - (R-h)]$$

$$I_A = I_{cm} + MR^2 = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 \quad \text{ή} \quad I_A = \frac{3}{2} MR^2 \quad \text{και αντικαθιστώντας έχουμε:}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} MR^2 \omega^2 - 0 = F_A \cdot 2R \cdot (\phi + \theta) - mg[R\eta\mu(\phi + \theta) - (R-h)]$$

$$\frac{3}{4} \cdot 100 \cdot 0,5^2 \omega^2 = 400 \cdot 1 \cdot 1,145 - 1000(0,91 \cdot 0,5 - 0,3)$$

$$18,75 \omega^2 = 303 \quad \text{ή} \quad \omega = 4,02 \text{r/s}$$

$$\text{Από την (1) έχουμε: } \frac{dK}{dt} = (F_A \cdot 2R - mg \cdot x_1) \cdot \omega =$$

$$= (400 \cdot 1 - 1000 \cdot 0,2065) \cdot 4,02 = 778 \text{ J/s}$$

5. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. από την αρχική θέση μέχρι ν' ανεβεί, κι έχουμε:

$$K_{\text{τελ.}} - K_{\alpha\rho\chi.} = W_{FA} + W_B \quad , \quad \frac{1}{2} I_A \omega'^2 - 0 = F_A \cdot 2R \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) - mgh$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} MR^2 \omega'^2 = 400 \cdot 1 \cdot (1,57 - 0,645) - 200$$

$$18,75 \omega'^2 = 170 \quad \text{ή} \quad \omega' = 3 \text{r/s}$$

6. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας, όταν ο κύλινδρος είναι οριζόντιος, είναι

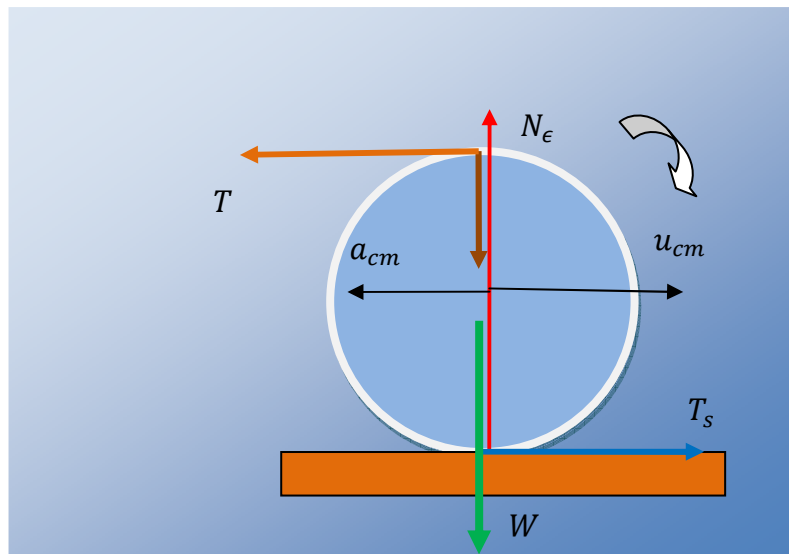
$u_{cm} = \omega' R = 3 \cdot 0,5 = 1,5 \text{ m/s}$, και η γωνιακή ταχύτητα γύρω από το κέντρο μάζας, παραμένει ίδια $\omega' = 3 \text{ r/s}$. Το c.m. κάνει ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, και ο κύλινδρος σταματά σε απόσταση $x_{cm} = 3 \text{ m}$

$$u_{cm}' = u_{cm} - a_{cm} t, \quad x_{cm} = u_{cm} t - \frac{1}{2} a_{cm} t^2$$

Όταν σταματά $u_{cm} = 0$ $t = \frac{u_{cm}}{a_{cm}}$ και $x_{cm} = \frac{u_{cm}^2}{2a_{cm}}$ ή $a_{cm} = \frac{u_{cm}^2}{2x_{cm}} = \frac{1,5^2}{2 \cdot 3} = 0,375 \text{ m/s}^2$

άρα $t = 1,5 / 0,375 = 4 \text{ s}$

β) Η συνολική τριβή ολίσθησης των χεριών μας με τον κύλινδρο είναι : $T = \mu N$



$\Sigma F_x = m a_{cm}$, $T - T_s = M a_{cm}$ (2) a_{cm} η επιβράδυνση του κέντρου μάζας

$\Sigma \tau_{(cm)} = I_{cm} \alpha_\gamma$, $TR + T_s R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha_\gamma$, $T + T_s = \frac{1}{2} M a_{cm}$ (3) „ $a_{cm} = \alpha_\gamma R$ (4)

Προσθέτω τις (2) και (3) κι έχω: $2T = \frac{3}{2} M a_{cm}$ ή $T = \frac{3}{4} M a_{cm} = \frac{3}{4} 100 \cdot 0,375 = 28 \text{ N}$

$\mu = T/N$ ή $N = T/\mu = 28/0,8 = 35 \text{ N}$

Άρα το κάθε χέρι μας ασκεί κατακόρυφη δύναμη $N_\chi = N/2 = 17,5 \text{ N}$.

Πρόδρομος Κορκίζογλου

7^ο Γ.Ε.Λ. Νέας Σμύρνης

prodkork@hotmail.com