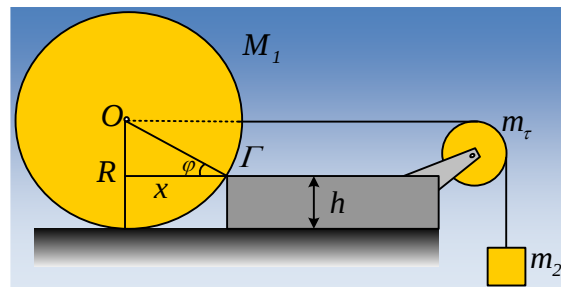


**Θα ανεβεί ο κύλινδρος το σκαλοπάτι;**  
**Αν ναι, πόση είναι η γωνιακή ταχύτητά του, όταν ανέβει.**



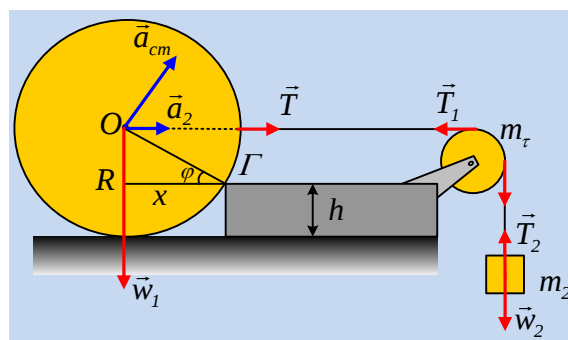
Στο σχήμα απεικονίζεται ένας κύλινδρος μάζας  $M_1$  ακτίνας  $R$ , ροπής αδράνειας  $I = \frac{M_1 R^2}{2}$ , εφάπτεται στο σκαλοπάτι ύψους  $h$ . Στο κέντρο του είναι προσαρμοσμένος άξονας που συνδέεται κατάλληλα μέσω μη εκτατού νήματος με τροχαλία μάζας  $m_\tau$  και ροπής αδράνειας  $I_\tau = \frac{m_\tau r^2}{2}$ . Το νήμα περνά από μια αύλακα της τροχαλίας και καταλήγει σε σώμα μάζας  $m_2$ . Το όλο σύστημα το κρατάμε ακίνητο. Κάποια στιγμή αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί.

1. Δείξτε ότι για να κινηθεί πρέπει να ισχύει:  $m_2 > \frac{M_1 \sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$  και να υπολογίσετε την αρχική γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου γύρω από το σημείο  $\Gamma$ .
2. Να αποδείξετε ότι ο κύλινδρος θα ανέλθει το σκαλοπάτι και να βρείτε τη γωνιακή ταχύτητά του γύρω από το  $\Gamma$ , αν η απόσταση από το κέντρο του κυλίνδρου μέχρι το σημείο που εφάπτεται της τροχαλίας είναι  $d$ .
3. Δείξτε ότι ο κύλινδρος θα αρχίσει να κυλίεται με αρχική γωνιακή ταχύτητα αυτή που απέκτησε στο ερώτημα 2.

Ο κύλινδρος δεν ολισθαίνει στην κόχη  $\Gamma$  του σκαλοπατιού.

**Εφαρμογή:**  $M_1=120\text{kg}$ ,  $h=0,2\text{m}$ ,  $R=0,5\text{m}$ ,  $m_2=180\text{kg}$ ,  $m_\tau=1\text{kg}$ ,  $d=0,9\text{m}$ ,  $g=10\text{m/s}^2$   
 $r=0,06\text{m}$ .

Απάντηση:



Έστω ότι ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από το  $\Gamma$ .

Ισχύει για το σώμα μάζας  $m_2$  :

$$\Sigma F_2 = m_2 a_2, \text{ ή } W_2 - T_2 = m_2 a_2, \text{ ή } T_2 = W_2 - m_2 a_2$$

Για την τροχαλία :  $\Sigma \tau = I_{\tau} \alpha_{\gamma\tau}$  ή  $T_2 r - T_1 r = I_{\tau} \alpha_{\gamma\tau} = \frac{1}{2} m_{\tau} r^2 \alpha_{\gamma\tau}$  ή

$$T_1 = T_2 - \frac{1}{2} m_{\tau} r \alpha_{\gamma\tau} = W_2 - m_2 a_2 - \frac{1}{2} m_{\tau} r \alpha_{\gamma\tau} \text{ όμως } a_2 = \alpha_{\gamma\tau} r \text{ άρα}$$

$$T_1 = m_2 g - m_2 a_2 - \frac{1}{2} m_{\tau} a_2 \quad (1)$$

Για τον κύλινδρο έχουμε, εφόσον χάνεται η επαφή με το δάπεδο,  $N=0$  και η δύναμη στο  $\Gamma$  δεν εμφανίζει ροπή γιατί διέρχεται ο φορέας της από το  $\Gamma$ :

$$\Sigma \tau = I_{\Gamma} \alpha_{\gamma\kappa} \text{ ή } T_1 (R-h) - M_1 g x = \left( \frac{1}{2} M_1 R^2 + M_1 R^2 \right) \alpha_{\gamma} = \frac{3}{2} M_1 R^2 \alpha_{\gamma} \quad (2)$$

Εφαρμόσαμε Steiner για να βρούμε τη ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς το  $\Gamma$ :

$$I_{\Gamma} = I_{cm} + M_1 R^2 = \left( \frac{1}{2} M_1 R^2 + M_1 R^2 \right) = \frac{3}{2} M_1 R^2$$

Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι  $a_{cm} = a_{\gamma} R$  γιατί περιστρέφεται γύρω από το  $\Gamma$  και είναι κάθετη στην ακτίνα του κυλίνδρου που διέρχεται από το  $\Gamma$ .

Η προβολή της  $a_{cm}$  στη διεύθυνση του νήματος είναι η επιτάχυνση του νήματος, δηλαδή:

$$a_2 = a_{cm} \eta \mu \phi = a_{cm} \frac{R-h}{R} = a_{\gamma} (R-h) \text{ και}$$

$$x = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{h(2R-h)} \text{ έτσι λόγω των (1) και (2) έχουμε:}$$

$$(m_2 g - m_2 a_2 - \frac{1}{2} m_{\tau} a_2) (R-h) - M_1 g \sqrt{h(2R-h)} = \frac{3}{2} M_1 R^2 \alpha_{\gamma}$$

$$m_2 g (R-h) - (m_2 + \frac{m_{\tau}}{2}) a_{\gamma} (R-h)^2 - M_1 g \sqrt{h(2R-h)} = \frac{3}{2} M_1 R^2 \alpha_{\gamma}$$

$$\alpha_{\gamma} = \frac{m_2 g (R-h) - M_1 g \sqrt{h(2R-h)}}{\left( m_2 + \frac{m_{\tau}}{2} \right) (R-h)^2 + \frac{3 M_1 R^2}{2}}$$

Για να κινηθεί ο κύλινδρος πρέπει να είναι  $a_{\gamma} > 0$  ή

$$m_2 g (R-h) - M_1 g \sqrt{h(2R-h)} \text{ ή}$$

$$m_2 > \frac{M_1 \sqrt{h(2R-h)}}{R-h}.$$

$$\text{εφαρμογή: } m_2 > \frac{120 \sqrt{0,2 \cdot 0,8}}{0,3} \text{ ή } m_2 > 160 \text{ kg, } a_{\gamma} = \frac{1800 \cdot 0,3 - 120 \sqrt{0,2 \cdot 0,8}}{180,5 \cdot 0,3^2 + 180 \cdot 0,5^2} \text{ ή } a_{\gamma} = 8 \text{ r/s}^2$$

2. Δεχόμενοι ότι πληρούται η συνθήκη  $m_2 > \frac{M_1 \sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$  δηλαδή ο κύλινδρος ξεκίνησε να περιστρέφεται γύρω από το  $\Gamma$ , θα δείξουμε ότι θάνέβει το σκαλοπάτι.

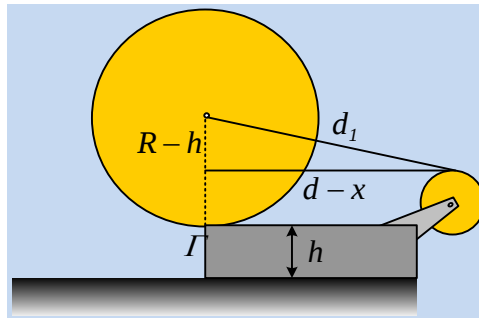
Η ροπή του βάρους του κυλίνδρου είναι ως προς το  $\Gamma$ :  $\tau_{W1(\Gamma)} = M_1 g x$

Η απόσταση  $x$  θα μικραίνει διαρκώς, άρα και η ροπή του βάρους ως προς το  $\Gamma$  θα μικραίνει, ενώ η ροπή της τάσης του νήματος θα αυξάνεται γιατί  $\tau_{T1(\Gamma)} = T_1 (R-h')$ . Καθώς ο κύλινδρος ανυψώνεται μειώνεται το  $h'$  και έτσι αυξάνεται η ροπή της τάσης.

Έτσι ο κύλινδρος θα ανέλθει το σκαλοπάτι γιατί  $\tau_{T1(\Gamma)} > \tau_{W1(\Gamma)}$  ή  $T_1(R-h') > M_1gx$

Θα μπορούσαμε να το αποδείξουμε υποθέτοντας ότι ανέβηκε ο κύλινδρος, και να βρούμε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του γύρω από το  $\Gamma$ .

Για να βρούμε πόσο κατέβηκε το σώμα  $m_2$ , αρκεί να βρούμε το μήκος του νήματος όταν ο κύλινδρος ανέβει και το κέντρο του να είναι στην κατακόρυφο που διέρχεται από το  $\Gamma$ . Θα είναι



$$x = \sqrt{h(2R - h)} = \sqrt{0,2(1 - 0,2)} = 0,4\text{m}$$

$$d_1 = \sqrt{(d-x)^2 + (R-h)^2} = \sqrt{0,5^2 + 0,3^2} = 0,58\text{m},$$

δεχόμενοι ότι η ακτίνα του κυλινδρου είναι αρκετά μεγαλύτερη από την ακτίνα της τροχαλίας.

Έτσι η μετατόπιση του  $m_2$  είναι

$$h_2 = d - d_1 = d - \sqrt{(d-x)^2 + (R-h)^2} = 0,9\text{m} - 0,58\text{m} = 0,32\text{m}$$

Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κι έχουμε:

$$m_2gh_2 = M_1gh + \frac{1}{2}m_2u_2^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_\tau r^2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{2}M_1R^2\omega^2$$

Όμως  $u_2 = \omega_2 r$  και  $u_2 = u_{\text{νημ.}} = u_{\text{cm}} \sin \theta = u_{\text{cm}} \frac{d-R}{d_1}$  και  $u_{\text{cm}} = \omega R$  άρα

$$u_2 = \omega R \frac{d-R}{d_1} \quad \text{κι έτσι}$$

$$m_2gh_2 = M_1gh + \frac{1}{2}m_2\left(\omega R \frac{d-R}{d_1}\right)^2 + \frac{1}{4}m_\tau\left(\omega R \frac{d-R}{d_1}\right)^2 + \frac{3}{4}M_1R^2\omega^2$$

Από την τελευταία βρίσκουμε την γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.

$$180 \cdot 10 \cdot 0,32 = 120 \cdot 10 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 1800 \cdot (0,4\omega)^2 + 0,25 \cdot 1 \cdot (0,4\omega)^2 + \frac{3}{4} \cdot 120 \cdot 0,5^2 \omega^2 \quad \text{ή}$$

$$576 = 360 + (144 + 0,04 + 22,5)\omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega^2 = \frac{216}{166,54} = 1,296 \quad \text{ή} \quad \omega = 1,14 \text{ r/s}$$

3. Η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου μόλις ανέβει το σκαλοπάτι είναι:

$$K = \frac{1}{2}I_\Gamma\omega^2 = \frac{1}{2}(I_{\text{cm}} + M_1R^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 + \frac{1}{2}M_1R^2\omega^2 = \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 + \frac{1}{2}M_1u_{\text{cm}}^2$$

Η κινητική ενέργεια μετά είναι λόγω μεταφορικής και λόγω στροφικής κίνησης γύρω από το κέντρο μάζας του:

$K' = \frac{1}{2} M_1 u_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega'^2$  Επειδή δεν έχουμε παραγωγή ή δαπάνη ενέργειας τη στιγμή που αρχίζει να κυλάει, η κινητική ενέργεια θα είναι ίση με πριν. Άρα  $K = K'$

$$\frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M_1 u_{cm}^2 = \frac{1}{2} M_1 u_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega'^2 \text{ και από εδώ } \omega' = \omega = 1,14 \text{ rad/s.}$$

Κορκίζογλου Πρόδρομος  
7<sup>ο</sup> Γ.Ε.Λ. Ν. ΣΜΥΡΝΗΣ “ΕΣΤΙΑ”  
**prodkork@hotmail.com**