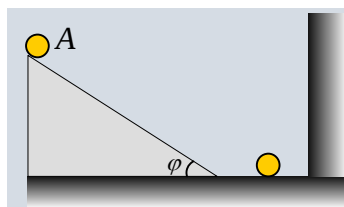


“ Η Οδύσσεια μιας μπίλιας”

ή

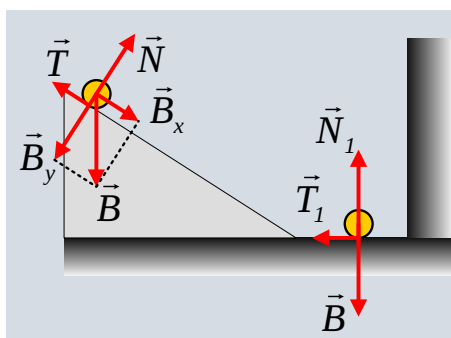
“ΠΩΣ ΘΑ ΚΙΝΗΘΕΙ ΜΙΑ ΜΠΙΛΙΑ ΠΟΥ ΑΦΗΝΟΥΜΕ ΣΕ ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΣΥΝΕΧΙΖΕΙ ΣΕ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΙ...”



Στο σχήμα απεικονίζεται κεκλιμένο επίπεδο κλίσης $\phi=30^\circ$ και ύψους $h=0,5\text{m}$. Από την κορυφή του Α αφήνουμε (μπίλια) κοίλη σφαίρα μάζας $m=0,2\text{kg}$, ακτίνας $R=3\text{cm}$ και ροπής αδράνειας $I = \frac{2}{3}mR^2$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι $\mu=0,1$ και ο συντελεστής οριακής τριβής $\mu_0=0,15$. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

1. Εξετάστε αν η σφαίρα θα ολισθήσει ή όχι.
2. Υπολογίστε την ταχύτητα του κέντρου μάζας στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.
3. Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου καθώς και τον αριθμό στροφών που έκανε.
4. Το οριζόντιο επίπεδο είναι όμοιο με το κεκλιμένο και η σφαίρα παρουσιάζει τους ίδιους συντελεστές τριβής. Πόση είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρα μετά από διαδρομή 1m στο οριζόντιο επίπεδο.
5. Πόση είναι η μεταβολή της στροφορμής της σφαίρας αν μετά από διαδρομή 1m στο οριζόντιο επίπεδο, συγκρουσθεί ελαστικά με τοίχωμα. Θα επιστρέψει στο σημείο Α ή όχι; Αν όχι μέχρι ποιο σημείο θα ανεβεί στο κεκλιμένο επίπεδο. Μετά θα κατέβει με κύλιση χωρίς ολίσθηση ή με ολίσθηση και μέχρι ποιο σημείο;;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:



1. Έστω η σφαίρα δεν ολισθαίνει. Τότε $\Sigma F_x = ma$ ή $B_x - T_s = ma$
 Όμως $\Sigma \tau = I\alpha_\gamma$ ή $T_s R = \frac{2}{3}mR^2\alpha_\gamma$ ή $T_s = \frac{2}{3}ma$ άρα $m g \eta \mu \phi - \frac{2}{3}ma = ma$ ή $a = 0,6 g \eta \mu \phi$
 και $T_s = \frac{2}{3}m(0,6 g \eta \mu \phi) = 0,4 m g \eta \mu \phi$
 Όμως $T_s \leq T_{\text{οριακή}}$ ή $0,4 m g \eta \mu \phi \leq \mu_{\text{οριακή}} m g \sigma \nu \nu \phi$ ή $0,4 \epsilon \phi \leq \mu_{\text{οριακή}}$

$$\text{ή } 0,4\epsilon\phi30 \leq \mu_{\text{οριακη}} \text{ ή } 0,4\frac{\sqrt{3}}{3} \leq 0,2 \text{ ή } 0,23 \leq 0,15 \text{ άτοπο.}$$

Άρα η υπόθεσή μας είναι λανθασμένη, δηλαδή έχουμε κύλιση με ολίσθηση .

$$2. \text{ Είναι } \Sigma F_x = ma \text{ ή } B_x - T = ma \text{ ή } m\eta\mu\phi - \mu N = ma \text{ ή } m\eta\mu\phi - \mu mg\sigma\upsilon\nu\phi = ma$$

$$a = g(\eta\mu\phi - \mu\sigma\upsilon\nu\phi) = 10\left(\frac{1}{2} - 0,1\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (5 - 0,5\sqrt{3})m/s^2 = 4,1m/s^2$$

$$\eta\mu\phi = \frac{h}{x} \text{ ή } x = 1m \text{ όμως } x = \frac{1}{2}at^2 \text{ άρα } t = \sqrt{\frac{2x}{a}} \text{ ή } t = \sqrt{\frac{2}{4,1}} = 0,7s \text{ και } u_{cm} = at = 2,87m/s$$

$$3. \text{ Είναι } \Sigma \tau = I\alpha_{\gamma} \text{ ή } TR = \frac{2}{3}mR^2\alpha_{\gamma} \text{ ή } \mu N = \frac{2}{3}mR\alpha_{\gamma} \text{ ή } \mu mg\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{2}{3}mR\alpha_{\gamma}$$

$$\alpha_{\gamma} = \frac{3\mu g\sigma\upsilon\nu\phi}{2R} \text{ ή } \alpha_{\gamma} = \frac{3 \cdot 0,1 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = 25\sqrt{3} \text{ rad/s}^2$$

$$\omega = \alpha_{\gamma}t \text{ ή } \omega = 25\sqrt{3} \cdot 0,7 = 17,5\sqrt{3} \text{ rad/s} = 30,3 \text{ r/s}$$

$$\text{και } \theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma}t^2 \text{ ή } \theta = \frac{1}{2}50\sqrt{3} \cdot \frac{2}{4,1} = 10,5 \text{ rad}$$

$$\text{Επομένως ο αριθμός στροφών που έκανε είναι: } N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{10,5}{2\pi} = 1,6$$

Αν δεν είχαμε ολίσθηση , ο αριθμός στροφών θα ήταν $N = x/2\pi R = 1/2\pi \cdot 0,03 = 5,3$ στροφές.

4. Στο οριζόντιο επίπεδο: επειδή $u_{cm} = 2,87m/s$ και $\omega = 30,3 \text{ r/s}$ ΔΕΝ ισχύει η συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση ,δηλαδή $\omega R = 0,9m/s$ και $u_{cm} = 2,87m/s$,άρα η ταχύτητα του σημείου επαφής της σφαίρας με το οριζόντιο δάπεδο είναι $u = u_{cm} - \omega R = 2,87 - 0,9 = 1,97 \text{ m/s}$, κι έτσι η τριβή ολίσθησης θα είναι αντίθετη με τη φορά κίνησης ,δηλ. αριστερά , άρα θα έχουμε **ολίσθηση** και στο οριζόντιο επίπεδο , μέχρι τη στιγμή που θα ισχύει $u_{cm}' = \omega'R$.

$$\text{Είναι } \Sigma F_x = ma' \text{ ή } T = ma' \text{ ή } \mu N_1 = ma' \text{ ή } \mu mg = ma' \text{ ή } a' = \mu g = 1m/s^2 \text{ (επιβράδυνση)}$$

$$\text{Και } \Sigma \tau = I\alpha'_{\gamma} \text{ ή } TR = \frac{2}{3}mR^2\alpha'_{\gamma} \text{ ή } \mu mgR = \frac{2}{3}mR^2\alpha'_{\gamma} \text{ ή } \alpha'_{\gamma} = \frac{3\mu g}{2R} = \frac{3}{0,06}$$

$$\alpha'_{\gamma} = 50r/s^2 \text{ (γωνιακή επιτάχυνση)}$$

$$u_{cm}' = \omega'R \text{ ή } u_{cm} - a't' = (\omega + \alpha_{\gamma}t')R \text{ ή } t' = (u_{cm} - \omega R)/(a' + \alpha'_{\gamma}R)$$

$$t' = (2,87 - 0,9)/(1 + 50 \cdot 0,03) = 0,788 \text{ s}$$

$$x' = u_{cm}t' - \frac{1}{2}a't'^2 = 2,87 \cdot 0,788 - 0,5 \cdot 1 \cdot 0,788^2 = 1,95m > 1m$$

Αυτό σημαίνει ότι ΔΕΝ προλαβαίνει να βρεθεί στην κατάσταση κύλισης χωρίς ολίσθηση, αλλά συγκρούεται με το τοίχωμα πριν.

$$x' = u_{cm}t' - \frac{1}{2}a't'^2, 1 = 2,87t' - 0,5t'^2, 0,5t'^2 - 2,87t' + 1 = 0$$

$$t' = x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2,87 \pm \sqrt{2,87^2 - 2}}{2 \cdot 0,5} = \frac{2,87 \pm 2,5}{1} \text{ ή } t' = 5,37 > 0,788 \text{ απορρίπτεται}$$

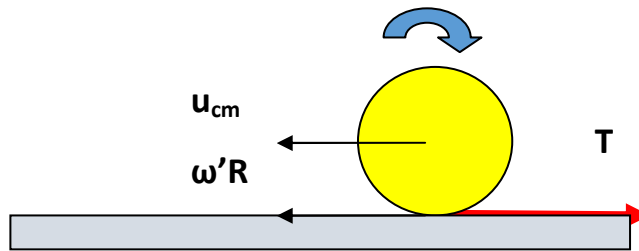
$$\text{και } t' = 0,37s \text{ δεκτή.}$$

$$u' = u_{cm} - a't' = 2,87 - 1 \cdot 0,37 = 2,5m/s$$

$$5. \text{ Είναι } \omega' = \omega + \alpha_{\gamma}t' \text{ και } \Sigma \tau = I\alpha_{\gamma} \text{ ή } TR = \frac{2}{3}mR^2\alpha_{\gamma} \text{ ή } \mu mg = \frac{2}{3}mR\alpha_{\gamma} \text{ ή}$$

$$\alpha_{\gamma} = \frac{3\mu g}{2R} \text{ ή } \alpha_{\gamma} = \frac{3 \cdot 0,1 \cdot 10}{2 \cdot 0,06} \text{ ή } \alpha_{\gamma} = 50r/s^2$$

$$\text{άρα } \omega' = 30,3 + 50 \cdot 0,37 \text{ ή } \omega' = 48,8 \text{ r/s}$$



Η σφαίρα όταν χτυπήσει ελαστικά στο κατακόρυφο τοίχωμα, αντιστρέφει την ταχύτητα του κέντρου μάζας της, ενώ η γωνιακή ταχύτητα διατηρείται, κι αυτό γιατί δεν έχουμε καμιά ροπή που να δράσει στο χρονικό διάστημα επαφής με τον τοίχο. Άρα **η μεταβολή της στροφορμής είναι μηδέν**.

Δηλαδή έχει **ανάποδες στροφές**, καθώς θα κινείται προς τα αριστερά, άρα θα ολισθήσει επιβραδυνόμενη μεταφορικά και στροφικά. Η ταχύτητα του σημείου επαφής με το δάπεδο είναι $\omega'R + u' = 48,8 \cdot 0,03 + 2,5 = 3,964 \text{ m/s}$ και η τριβή ολίσθησης αντίθετη της κίνησης που θα επιβραδύνει μεταφορικά και στροφικά.

Γεννιέται το ερώτημα πότε θα σταματήσει γρηγορότερα, μεταφορικά ή στροφικά; Οι επιταχύνσεις παραμένουν ίδιες γιατί οι δυνάμεις είναι ίδιες με πριν την κρούση.

Για τη μεταφορική κίνηση: $t_{ολ} = \frac{u'}{a_{cm}} = \frac{2,5}{1} = 2,5 \text{ s}$

Για τη στροφική κίνηση: $t_{ολ}' = \frac{\omega'}{\alpha_\gamma} = \frac{48,8}{50} = 0,976 \text{ s}$

Παρατηρούμε ότι σταματά πρώτα στροφικά και μετά επιταχύνεται στροφικά και αριστερόστροφα, ενώ συνεχίζει να επιβραδύνεται μεταφορικά, μέχρι να κυλήσει χωρίς να ολισθαίνει. Η ταχύτητα του c.m. u_1 και η μετατόπιση x_1 είναι

$$u_1 = u' - a_{cm}t' = 2,5 - 1 \cdot 0,976 = 1,524 \text{ m/s} \quad \text{και} \quad x_1 = u't' - \frac{1}{2}at'^2$$

$$x_1 = 2,5 \cdot 0,976 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,976^2 = 1,96 \text{ m} > 1 \text{ m}$$

Αυτό σημαίνει ότι **θα φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου έχοντας ανάποδες στροφές**. Από την επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση έχουμε:

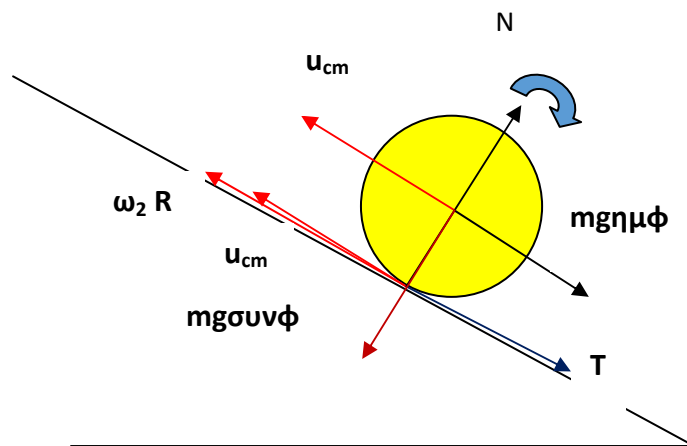
$$x = u't_1 - \frac{1}{2}a_{cm}t_1^2 \quad \text{ή} \quad 1 = 2,5 t_1 - \frac{1}{2} t_1^2 \quad \text{ή} \quad t_1^2 - 5 t_1 + 2 = 0 \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 8}}{2} = \frac{5 \pm 4,12}{2}$$

$t_1 = 4,56 \text{ s} > 2,5 \text{ s}$ απορρίπτεται άρα **$t_1 = 0,44 \text{ s}$** δεκτή.

$$u_2 = u' - a_{cm}t_1 = 2,5 - 1 \cdot 0,44 \cong 2 \text{ m/s}$$

$$\omega_2 = \omega' - \alpha_\gamma t_1 = 48,8 - 50 \cdot 0,44 = 26,8 \text{ r/s, δεξιόστροφα.}$$

Το σημείο επαφής της σφαίρας με το κεκλιμένο επίπεδο έχει ταχύτητα $u_A = u_{cm} + \omega_2 R = 2 + 26,8 \cdot 0,03 = 2,8 \text{ m/s}$ άρα η τριβή T ολίσθησης θα είναι προς τα κάτω και η σφαίρα θα επιβραδύνει μεταφορικά και στροφικά.



Στην **άνοδο** έχουμε:

$\Sigma F_x = ma_{cm}$ ή $-B_x - T = ma_{cm}$ ή $-mg\eta\mu\phi - \mu mg\sigma\upsilon\nu\phi = ma_{cm}$ ή $a_{cm} = -g(\eta\mu\phi + \mu\sigma\upsilon\nu\phi) = -10(\frac{1}{2} + 0,1\frac{\sqrt{3}}{2}) = -5,86\text{m/s}^2$ οπότε η ολική μετατόπιση στο **κεκλιμ. μέχρι να σταματήσει**

$$\text{είναι } x_3 = \frac{u_2^2}{2a_{cm}} = \frac{2^2}{2 \cdot 5,86} = \mathbf{0,34\text{m}}$$
 και σε χρόνο $t_3 = \frac{u_2}{a_{cm}} = \frac{2}{5,86} = \mathbf{0,34\text{s}}$.

$$\text{Όμως } \Sigma \tau = I\alpha_\gamma \text{ ή } -TR = \frac{2}{3}mR^2\alpha_\gamma \text{ ή } -\mu mg\sigma\upsilon\nu\phi R = \frac{2}{3}mR^2\alpha_\gamma$$

$$\alpha_\gamma = -\frac{3\mu g\sigma\upsilon\nu\phi}{2R} \text{ ή } \alpha_\gamma = -\frac{3 \cdot 0,1 \cdot 10 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cdot 0,03} \text{ ή } \alpha_\gamma = \mathbf{-25\sqrt{3} \text{ r/s}^2 = -43,3 \text{ r/s}^2}$$

Η **γωνιακή ταχύτητα στο σημείο που σταμάτησε μεταφορικά** είναι $\omega_3 = \omega_2 + \alpha_\gamma t_3 = 26,8 - 43,3 \cdot 0,34 = \mathbf{12 \text{ r/s}}$ δηλαδή θα **περιστρέφεται ακόμη δεξιόστροφα**.

Και μετά τι;;;

Η σφαίρα θ'αρχίσει να κατέρχεται το κεκλιμένο επίπεδο με αρχική γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = \omega_3 = \mathbf{12 \text{ r/s}}$ και μηδενική αρχική ταχύτητα του κέντρου μάζας. Δηλαδή θα ξεκινήσει **σπινιάροντας προς τα κάτω**.

Στην **κάθοδο** θα έχουμε:

μεταφορική κίνηση:

$$\Sigma F_x = ma_{cm} \text{ ή } B_x + T = ma_{cm} \text{ ή } mg\eta\mu\phi + \mu mg\sigma\upsilon\nu\phi = ma_{cm} \text{ ή } a_{cm} = g(\eta\mu\phi + \mu\sigma\upsilon\nu\phi) = \mathbf{5,86\text{m/s}^2}$$

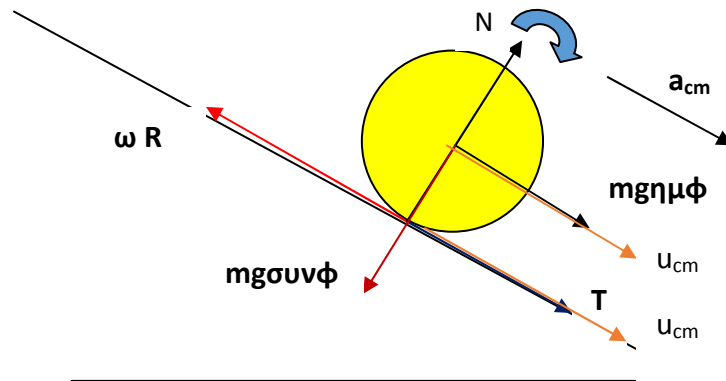
Στροφοική κίνηση:

$$\Sigma \tau = I\alpha_\gamma \text{ ή } -TR = \frac{2}{3}mR^2\alpha_\gamma \text{ ή } -\mu mg\sigma\upsilon\nu\phi R = \frac{2}{3}mR^2\alpha_\gamma$$

$$\alpha_\gamma = -\frac{3\mu g\sigma\upsilon\nu\phi}{2R} \text{ ή } \alpha_\gamma = -\frac{3 \cdot 0,1 \cdot 10 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cdot 0,03} \text{ ή } \alpha_\gamma = \mathbf{-25\sqrt{3} = -43,3 \text{ r/s}^2}$$

Όσο η **ταχύτητα του σημείου επαφής είναι προς τα πάνω**, η τριβή έχει φορά προς τα κάτω και **επιταχύνει μεταφορικά** μαζί με τη συνιστώσα του βάρους

$mg\eta\mu\phi$, και **επιβραδύνει στροφικά**, μέσω της ροπής της, μέχρι τη στιγμή που θα γίνει :



$$u_{cm} = \omega R \quad \text{ή} \quad a_{cm} t = (\omega_0 + \alpha_y t) R \quad \text{ή}$$

$$t = \frac{\omega_0 R}{a_{cm} - R\alpha_y} \quad \text{ή} \quad t = \frac{12.0,03}{5,86 - 0,03 \cdot (-43,3)} \quad \text{ή} \quad t = \frac{0,36}{7,16} = \mathbf{0,05s}$$

Η μετατόπιση είναι: $x = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 = 0,5 \cdot 5,86 \cdot 0,05^2 = 0,007m$ (μόνο 0,7cm από το ανώτερο σημείο που έφτασε θα κατέλθει!!), και θα αποκτήσει ταχύτητα $u = a_{cm} t = 5,86 \cdot 0,05 = \mathbf{0,29m/s}$.

Η γωνιακή ταχύτητα στη θέση αυτή θα είναι $\omega = u/R = 0,29/0,03$ ή $\omega = \mathbf{9,66 \text{ r/s}}$. Από τη θέση αυτή και μετά έχουμε ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ της τριβής ολίσθησης γιατί όπως δείξαμε στο πρώτο ερώτημα, δεν μπορεί να έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση με τα δεδομένα του προβλήματος. Απλώς η επιτάχυνση του c.m. θα αλλάξει για το υπόλοιπο διάστημα στο κεκλιμένο επίπεδο, δηλ. για $\Delta x = 0,34m - 0,007m = 0,333m$.

$$\text{Είναι } \Sigma F_x = ma \quad \text{ή} \quad B_x - T = ma \quad \text{ή} \quad mg\eta\mu\phi - \mu N = ma \quad \text{ή} \quad mg\eta\mu\phi - \mu mg\sigma\upsilon\nu\phi = ma$$

$$a = g(\eta\mu\phi - \mu\sigma\upsilon\nu\phi) = 10\left(\frac{1}{2} - 0,1\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (5 - 0,5\sqrt{3})m/s^2 = \mathbf{4,1m/s^2}$$

$$x = 0,33m \quad \text{όμως} \quad x = u_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{άρα} \quad 0,33 = 0,29t + 2,05t^2 \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{2,05t^2 + 0,29t - 0,33 = 0} \quad \text{και από εδώ}$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0,29 \pm \sqrt{0,29^2 - 4 \cdot 2,05 \cdot (-0,33)}}{4,1} = \frac{-1 \pm 1,67}{4,1}$$

$$\text{δεκτή η θετική ρίζα} \quad \mathbf{t = 0,163s}$$

άρα η ταχύτητα του c.m. της σφαίρας θα είναι $u'_{cm} = u_0 + at = 0,33 + 4,1 \cdot 0,163 = \mathbf{0,998m/s}$
 $u'_{cm} \cong \mathbf{1m/s}$ (στη θέση του κεκλ. επιπέδου κι όταν μπαίνει στο οριζόντιο επίπεδο)

και η γωνιακή ταχύτητα $\omega' = \omega + \alpha_y t = 9,66 + 43,3 \cdot 0,163 = \mathbf{36,9 \text{ r/s}}$.

Επειδή η ταχύτητα του σημείου επαφής της σφαίρας με το οριζόντιο επίπεδο είναι

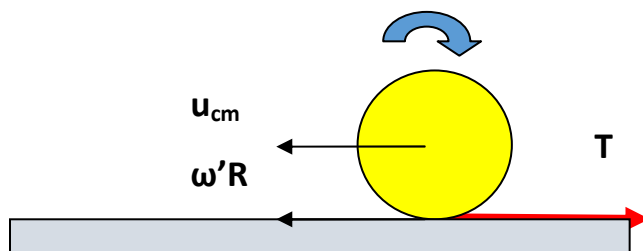
$u_E = u'_{cm} - \omega' R = 1 - 36,9 \cdot 0,03 = -0,1 \text{ m/s}$, η τριβή θα είναι προς τα δεξιά, άρα η μεταφορική κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο είναι επιταχυνόμενη και η στροφική κίνηση επιβραδυνόμενη, δηλαδή έχουμε κύλιση με ολίσθηση, μέχρι να γίνει

$$u_{cm1} = \omega_1 R \text{ ή } u'_{cm} + a_{cm} t_1 = (\omega' - \alpha_y t_1) R \text{ ή } 1 + 1 \cdot t_1 = (36,9 - 50 t_1) 0,03 \text{ ή } t_1 = 0,0428 \text{ s} \text{ οπότε}$$

$$u_{cm1} = 1 + 1 \cdot 0,0428 = 1,0428 \text{ m/s} \text{ και } \omega_1 = u_{cm1} / R = 34,76 \text{ r/s}$$

$$x_1 = u'_{cm} t_1 + (1/2) a_{cm} t_1^2 = 1 \cdot 0,0428 + 0,5 \cdot 1 \cdot 0,0428^2 = 0,043 \text{ m} .$$

Από το σημείο αυτό και μέχρι το τοίχωμα θα έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση, δηλαδή για διάστημα $1 - 0,043 = 0,957 \text{ m}$. Σχεδόν στην αρχή του οριζοντίου επιπέδου και μέχρι το τοίχωμα θα έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση.



Η σφαίρα όταν χτυπήσει ελαστικά στο κατακόρυφο τοίχωμα , αντιστρέφει την ταχύτητα του κέντρου μάζας της, ενώ η γωνιακή ταχύτητα διατηρείται , κι αυτό γιατί δεν έχουμε καμιά ροπή που να δράσει στο χρονικό διάστημα επαφής με τον τοίχο. Άρα **η μεταβολή της στροφορμής είναι μηδέν**.

Δηλαδή έχει **ανάποδες στροφές**, άρα θα ολισθήσει επιβραδυνόμενη μεταφορικά και στροφικά. Η ταχύτητα του σημείου επαφής με το δάπεδο είναι $u_E = u_{cm1} + \omega_1 R \cong 2 \text{ m/s}$ και η τριβή ολίσθησης αντίθετη της κίνησης που θα επιβραδύνει μεταφορικά και στροφικά.

Γεννιέται το ερώτημα πότε θα σταματήσει γρηγορότερα , μεταφορικά ή στροφικά; Οι επιταχύνσεις παραμένουν ίδιες γιατί οι δυνάμεις είναι ίδιες με πριν την κρούση.

$$\text{Για τη μεταφορική κίνηση: } t_{ολ} = \frac{u_{cm1}}{a_{cm}} = \frac{1,0428}{1} = 1,0428 \text{ s}$$

$$\text{Για τη στροφική κίνηση: } t_{ολ}' = \frac{\omega_1}{\alpha_y} = \frac{34,76}{50} = 0,695 \text{ s}$$

Παρατηρούμε ότι σταματά πρώτα στροφικά και μετά επιταχύνεται στροφικά και αριστερόστροφα, ενώ συνεχίζει να επιβραδύνεται μεταφορικά, μέχρι να κυλήσει χωρίς να ολισθαίνει. Η ταχύτητα του c.m. u_1 και η μετατόπιση x_1 είναι

$$u_1 = u_{cm1} - a_{cm} t_{ολ}' = 1,0428 - 1 \cdot 0,695 = 0,348 \text{ m/s} \text{ και } x_1 = u_{cm1} t_{ολ}' - \frac{1}{2} a_{cm} t_{ολ}'^2$$

$$x_1 = 1,0428 \cdot 0,695 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,695^2 = 0,48 \text{ m} < 1 \text{ m}$$

Στη θέση αυτή έχει $\omega = 0$,άρα θα έχουμε κύλιση αριστερόστροφη με ολίσθηση, μέχρι να γίνει

$$u_2 = \omega_2 R \text{ οπότε μετά, θα έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση}$$

$$\text{ή } u_1 - a_{cm} t_2 = R \alpha_y t_2 \text{ ή } t_2 = u_1 / (a_{cm} + R \alpha_y) = 0,348 / (1 + 0,03 \cdot 50) = 0,14 \text{ s}$$

$$x_2 = u_1 t_2 - 0,5 \cdot a_{cm} t_2^2 = 0,348 \cdot 0,14 - 0,5 \cdot 1 \cdot 0,14^2 = 0,039 \text{ m}$$

$u_2 = u_1 - a_{cm}t_2 = 0,348 - 1,0 \cdot 0,14 = 0,208 \text{ m/s}$ και $\omega_2 = \alpha_y t_2 = 50 \cdot 0,14$ $\omega_2 = 7 \text{ r/s}$
 άρα θα έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση για διάστημα
 $x_3 = 1 - (0,48 + 0,039) = 0,481 \text{ m}$ με $u_2 = 0,208 \text{ m/s}$ και $\omega_2 = 7 \text{ r/s}$ και κατόπιν
 ανεβαίνει το κεκλιμένο επίπεδο με κύλιση με ολίσθηση και αριστερόστροφες
 στροφές.

Όπως βρήκαμε πριν έχουμε γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_y = -43,3 \text{ r/s}^2$ και
 επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση, με επιβράδυνση

$a_{cm} = (g \eta \mu \phi - \mu g \sigma \nu \phi) = 5 - 0,1 \cdot 10 \cdot 0,86 = 4,14 \text{ m/s}^2$, άρα

$t_3 = u_2 / a_{cm} = 0,05 \text{ s}$ (χρονική στιγμή που σταματά να ανεβαίνει)

$x_4 = u_2^2 / 2a_{cm} = 0,208^2 / 8,28 = 0,005 \text{ m}$ (μετατόπιση στο κεκλιμένο επίπεδο
 ανεβαίνοντας μέχρι να σταματήσει στιγμιαία).

Τη στιγμή που σταματά μεταφορικά έχει γωνιακή ταχύτητα

$\omega_3 = \omega_2 + \alpha_y t_3 = 7 - 43,3 \cdot 0,05 = 4,8 \text{ r/s}$.

Το + σημαίνει ότι η σφαίρα στρέφεται **αριστερόστροφα** τη στιγμή που
σταματά μεταφορικά και αρχίζει να κατέρχεται **σπινιάροντας** και πάλι .

άρα η **τριβή είναι προς τα πάνω** που μαζί με τη **μημημφ** και επιταχύνει
 μεταφορικά προς τα κάτω με $a_{cm} = g(\eta \mu \phi - \mu \sigma \nu \phi) = 10(0,5 + 0,1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = 4,14 \text{ m/s}^2$

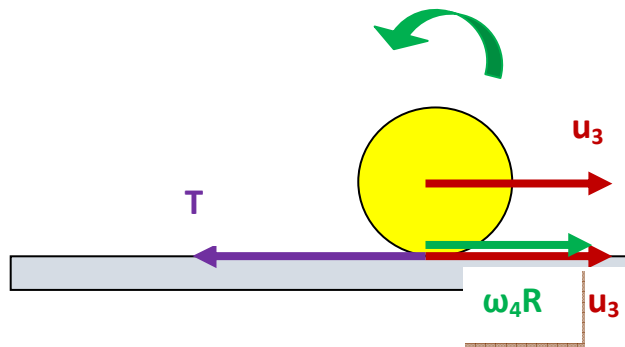
και η **ροπή της τριβής, επιβραδύνει την αριστερόστροφη περιστροφή της**
σφαίρας, με γωνιακή επιβράδυνση $\alpha_y = -43,3 \text{ r/s}^2$

Η σφαίρα κατεβαίνει τα $0,005 \text{ m}$ του κεκλιμένου επιπέδου σε χρόνο

$t = \sqrt{\frac{2x}{a_{cm}}} = \sqrt{\frac{0,01}{4,14}} = 0,049 \text{ s}$ και τότε η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας θα είναι

$\omega_4 = \omega_3 + \alpha_y t = 4,8 - 43,3 \cdot 0,049 = 2,67 \text{ r/s}$ **αριστερόστροφα**, όταν φτάνει στο
 οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα του κέντρου μάζας

$u_3 = a_{cm} t = 4,14 \cdot 0,049 = 0,2 \text{ m/s}$



Το σημείο επαφής της σφαίρας με το οριζόντιο δάπεδο έχει ταχύτητα

$u_E = u_3 + \omega_4 R = 0,2 + 2,67 \cdot 0,03 = 0,28 \text{ m/s}$.

η τριβή T θα επιβραδύνει μεταφορικά και στροφικά τη σφαίρα στο οριζόντιο
 δάπεδο. Ο χρόνος που απαιτείται να σταματήσει μεταφορικά είναι:

$t_\mu = u_3 / a_{cm} = 0,2 / 1 = 0,2 \text{ s}$ ενώ για την στροφική: $t_\sigma = \omega_4 / \alpha_y = 2,67 / 50 = 0,053 \text{ s} < 0,2 \text{ s}$

άρα θα σταματήσει πρώτα στροφικά και μετά θα περιστρέφεται

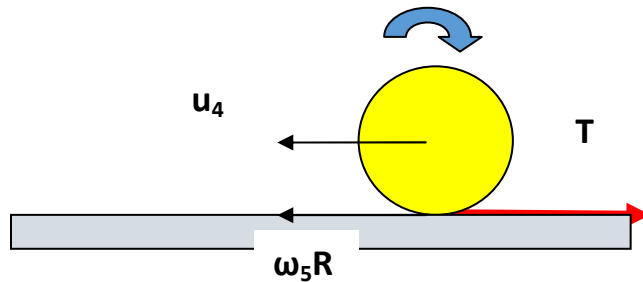
δεξιόστροφα μέχρι να έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση.

Τότε θα ισχύει $u_4 = \omega_5 R$ ή $u_3 - a_{cm} t_4 = (-\omega_4 + \alpha_y t_4) R$ ή $0,2 - t_4 = (-2,67 + 50 t_4) 0,03$

$0,2 - t_4 = -0,08 + 1,5 t_4$ ή $t_4 = 0,112s$ άρα $u_4 = u_3 - a_{cm}t_4 = 0,2 - 1 \cdot 0,112 = 0,088m/s$
 και $\omega_5 = u_4/R = 0,088/0,03 = 2,93r/s$.

$$x_4 = u_3 t_4 - \frac{1}{2} a_{cm} t_4^2 = 0,2 \cdot 0,088 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,088^2 = 0,013m$$

από τη στιγμή αυτή και μέχρι να συγκρουσθεί στο τοίχωμα (διανύει $1 - 0,013 = 0,987m$) θα κινείται με κύλιση χωρίς ολίσθηση και αφού συγκρουσθεί, θα αλλάξει η φορά της ταχύτητας προς τα αριστερά και θα έχουμε πάλι τριβή ολίσθησης προς τα δεξιά.



θα έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση προς τα αριστερά όταν

$$u_5 = \omega_6 R \text{ ή } u_4 - a_{cm} t_5 = (-\omega_5 + \alpha t_5) R \text{ ή } 0,088 - t_5 = (-2,93 + 50 t_5) 0,03$$

$$t_5 = 0,07s. \text{ Επίσης } u_5 = u_4 - a_{cm} t_5 = 0,088 - 0,07 = 0,018 m/s ,$$

$$\omega_5 = u_5/R = 0,018/0,03 = 0,6r/s.$$

$$x_5 = u_4 t_5 - 0,5 a_{cm} t_5^2 = 0,088 \cdot 0,07 - 0,5 \cdot 1 \cdot 0,07^2 = 0,004m$$

Θα διανύσει την απόσταση μέχρι τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου σε χρόνο $t = (1 - 0,0004)/0,018 = 55,5s$!!!!

και πρακτικά δεν θα ανέβει γιατί

$$\Delta x = \frac{u_5^2}{2a_{cm}} = \frac{0,018^2}{2 \cdot 4,14} = 0,0004m$$

prodkork@hotmail.com

Πρόδρομος Κορκίζογλου