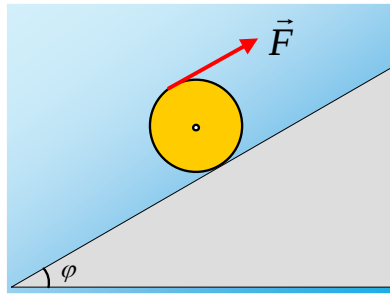


ΣΠΙΝΙΑΡΟΝΤΑΣ ΣΕ ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ



Στο σχήμα απεικονίζεται κεκλιμένο επίπεδο κλίσης φ : $\eta\mu\varphi=0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,8$, ένας κύλινδρος μάζας $m=1\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,1\text{m}$ και ροπής αδράνειας ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2}mR^2$. Γύρω από την περιφέρειά του και στο μέσο του ύψους του έχουμε τυλίξει πολλές φορές, λεπτό νήμα μη εκτατό, σε αύλακα που υπάρχει. Ο κύλινδρος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, και στην αρχή δεν εφάπτεται του κεκλιμένου επιπέδου. Στο άκρο του νήματος, τη χρονική στιγμή $t_0=0$ ασκούμε σταθερή δύναμη $F=mg$ μέχρι να αποκτήσει συχνότητα $f_0=\frac{60}{\pi}$ Hz, και αμέσως τον αφήνουμε στο κεκλιμένο επίπεδο ελεύθερο χωρίς να ασκούμε δύναμη στο νήμα. Παρατηρούμε ότι ο κύλινδρος περιστρέφεται για λίγο στη θέση που τον αφήσαμε, και όταν σταματήσει να περιστρέφεται, αρχίζει να κυλά προς τα κάτω, μετατοπίζοντας το κέντρο μάζας του κατά $x=0,5\text{m}$, κυλιόμενος χωρίς ολίσθηση. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$ και ότι ο άξονάς του μετακινείται παράλληλα στην αρχική διεύθυνση.

1. Ποια χρονική στιγμή t_1 αφήσαμε τον κύλινδρο στο κεκλιμένο επίπεδο.
2. Εξηγείστε γιατί ο κύλινδρος παρέμεινε για λίγο στο κεκλιμένο επίπεδο και υπολογίστε το χρονικό διάστημα αυτό.
3. Βρείτε τη χρονική στιγμή t_3 που φτάνει στη βάση του κεκλ. επιπέδου καθώς και την ταχύτητα του κέντρου μάζας.
4. Πόση θερμότητα παράχθηκε ; Να υπολογίσετε το λόγο των δεξιόστροφων στροφών που έκανε ο κύλινδρος προς τον αριθμό των αριστερόστροφων.

Επαναλαμβάνουμε όπως και πριν με κλίση 30° του κεκλ. επιπέδου. Τη στιγμή που ακουμπά ($t=0$) στο κεκλιμ. επίπ. έχει την παραπάνω συχνότητα $f_0=\frac{60}{\pi}$ Hz.

5. Πόσο διάστημα θα διανύσει ανεβαίνοντας μέχρι να σταματήσει στιγμιαία;

$$\text{Δίνεται } \frac{15\sqrt{3}}{4}=6,5$$

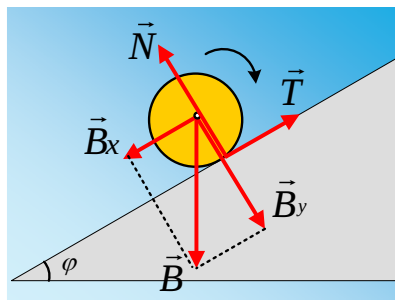
Απάντηση:

1. Η γωνιακή ταχύτητα που αποκτά ο κύλινδρος είναι: $\omega_0 = 2\pi f_0 = 120 \text{ r/s}$.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για τη στροφική κίνηση κι έχουμε:

$$K_{\text{τελ.}} - K_{\text{αρχ.}} = W_F \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} I \omega_0^2 = FR\theta_0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} \frac{1}{2} m R^2 \omega_0^2 = mgR\theta_0 \quad \text{ή}$$

$$\theta_0 = \frac{\omega_0^2 R}{4g} = \frac{120^2 \cdot 0,1}{40} = 36 \text{ rad.}$$



$$\text{Επίσης ισχύει: } \Sigma \tau = I \alpha_\gamma \quad \text{ή} \quad FR = \frac{1}{2} m R^2 \alpha_\gamma \quad \text{ή} \quad mgR = \frac{1}{2} m R^2 \alpha_\gamma \quad \text{ή} \quad \alpha_\gamma = \frac{2g}{R} = 200 \text{ r/s}^2$$

$$\text{Άρα } \omega_0 = \alpha_\gamma t_1 \quad \text{κι έτσι} \quad t_1 = 120/200 = 0,6 \text{ s.}$$

2. Ο κύλινδρος στρέφεται δεξιόστροφα τη στιγμή που έρχεται σε επαφή με το κεκλιμένο επίπεδο, άρα θα εμφανισθεί τριβή ολίσθησης τα προς τα πάνω .

Επειδή ισορροπεί θα ισχύει:

$$T = B \eta \mu \phi \quad \text{ή} \quad \mu N = mg \eta \mu \phi \quad \text{ή} \quad \mu mg \sigma \nu \nu \phi = mg \eta \mu \phi \quad \text{ή} \quad \mu = \epsilon \phi \phi = \frac{\eta \mu \phi}{\sigma \nu \nu \phi} = \frac{3}{4}$$

Άρα ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι $\mu = 3/4$.

Όταν ο κύλινδρος σταματήσει να περιστρέφεται θα αρχίσει να κυλάει χωρίς ολίσθηση προς τα κάτω. Μέχρι τότε θα στρέφεται στο ίδιο σημείο μέχρι να σταματήσει.

$$\text{Είναι } \Sigma \tau = I \alpha_\gamma \quad \text{ή} \quad TR = \frac{1}{2} m R^2 \alpha_\gamma \quad \text{ή} \quad mg \eta \mu \phi R = \frac{1}{2} m R^2 \alpha_\gamma \quad \text{ή}$$

$$\alpha_\gamma = \frac{2g \eta \mu \phi}{R} \quad \text{ή}$$

$\alpha_\gamma = 120 \text{ r/s}^2$ (γωνιακή επιβράδυνση) .

$$\text{Όμως } \omega = \omega_0 - \alpha_\gamma \Delta t = 0 \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\omega_0}{\alpha_\gamma} = 1 \text{ s.}$$

Δηλαδή ο κύλινδρος στρέφεται στο ίδιο σημείο για 1s και αμέσως μετά κυλάει προς τα κάτω.

3. Για την κύλιση χωρίς ολίσθηση ισχύουν:

$$\Sigma F_x = ma_{cm} \quad mgh\mu\phi - T = ma_{cm}$$

$$\Sigma \tau = I\alpha_\gamma \quad \text{ή} \quad TR = \frac{1}{2}mR^2\alpha_\gamma \rightarrow T = \frac{1}{2}ma_{cm}$$

$$\text{άρα } mgh\mu\phi - \frac{1}{2}ma_{cm} = ma_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{2}{3}g\mu\phi \rightarrow a_{cm} = \frac{4m}{s^2},$$

$$\text{άρα η στατική τριβή θα είναι } T = \frac{1}{2}m\frac{2}{3}g\mu\phi = \frac{1}{3}mgh\mu\phi < mgh\mu\phi = T_{ολισθ.}$$

Επειδή η οριακή τριβή είναι μεγαλύτερη της τριβής ολίσθησης, άρα ο κύλινδρος θα κυλήσει στο κεκλιμένο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει.

$$x_{cm} = \frac{1}{2}a_{cm}\Delta t_2^2 \rightarrow \Delta t_2 = \sqrt{\frac{2x_{cm}}{a_{cm}}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0,5s.$$

Η χρονική στιγμή που φτάνει στη βάση του κεκλ. επιπέδου είναι:

$$t_3 = t_1 + \Delta t + \Delta t_2 = 0,6s + 1s + 0,5s = 2,1s.$$

4. Η θερμότητα που παράχθηκε είναι εξαιτίας της τριβής ολίσθησης, όταν αφήσαμε τον κύλινδρο στο κεκλιμένο επίπεδο, μέχρι να αρχίσει να κυλάει προς τα κάτω.

$$Q_\theta = K_{\sigma\tau\phi} = \frac{1}{2}I\omega_o^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega_o^2 = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 0,01 \cdot 120^2 = 36J$$

Ο αριθμός των στροφών N_1 που έκανε στο ίδιο σημείο είναι: $W_T = -TR\theta_1$ ή $-36 = -0,6 N_1 2\pi$

$$N_1 = \frac{30}{\pi} \text{ στροφές.}$$

Ο συνολικός αριθμός των δεξιόστροφων στροφών είναι $N_\delta = \frac{\theta_o}{2\pi} + N_1 = \frac{36}{2\pi} + \frac{30}{\pi} = \frac{48}{\pi}$

ενώ των αριστερόστροφων είναι $N_\alpha = \frac{x_{cm}}{2\pi R} = \frac{0,5}{2\pi \cdot 0,1} = \frac{2,5}{\pi}$ άρα ο λόγος του είναι

$$\frac{N_\delta}{N_\alpha} = \frac{\frac{48}{\pi}}{\frac{2,5}{\pi}} = \frac{96}{5} = 19,2$$

5. Η τριβή ολίσθησης είναι: $T = \mu N = \mu mg \sin 30^\circ = \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} N = 6,5 N$ ενώ η

συνιστώσα του βάρους είναι: $B_x = mg \mu 30^\circ = 5N < 6,5N$

άρα ο κύλινδρος θα αρχίσει να ανέρχεται με επιτάχυνση του κέντρου μάζας του

$$a_{cm} = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{T - B_x}{m} = \frac{6,5 - 5}{1} = 1,5 \text{ m/s}^2.$$

Ταυτόχρονα θα περιστρέφεται δεξιόστροφα με ολίσθηση μέχρι να αρχίσει να κυλάει χωρίς ολίσθηση. Η γωνιακή επιβράδυνση θα είναι:

$$\alpha_y = \frac{\Sigma \tau}{I} = \frac{TR}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{2 \cdot 6,5}{0,1} = 130 \text{ r/s}^2$$

Θα έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση όταν $u_{cm} = \omega R$ ή $a_{cm} t_1 = (\omega_o - \alpha_y t_1) R \rightarrow$

$$t_1 = \frac{\omega_o R}{a_{cm} + \alpha_y R} = \frac{12}{1,5 + 13} = 0,827 \text{ s}$$

Θα μετατοπισθεί κατά $x_1 = \frac{1}{2} a_{cm} t_1^2 = \frac{1}{2} 1,5 0,827^2 = 0,51 \text{ m}$

και η ταχύτητα του cm θα είναι $u_{cm} = a_{cm} t_1 = 1,5 \cdot 0,827 = 1,24 \text{ m/s}$.

Αμέσως μετά έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. κι έχουμε: $K_{μετ.} + K_{στρ.} = mgh \mu \phi x_2$

$$\frac{1}{2} m u_{cm}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 = mgh \mu \phi x_2 \quad \text{επειδή } u_{cm} = \omega R \text{ έχουμε}$$

$$\frac{3}{4} m u_{cm}^2 = mgh \mu \phi x_2 \rightarrow x_2 = \frac{3 u_{cm}^2}{4 g \mu \phi 30} = \frac{3 \cdot 1,24^2}{20} = 0,23 \text{ m}$$

άρα η συνολική μετατόπιση είναι $x_1 + x_2 = 0,51 \text{ m} + 0,23 \text{ m} = 0,74 \text{ m}$.

Κορκίζογλου πρόδρομος