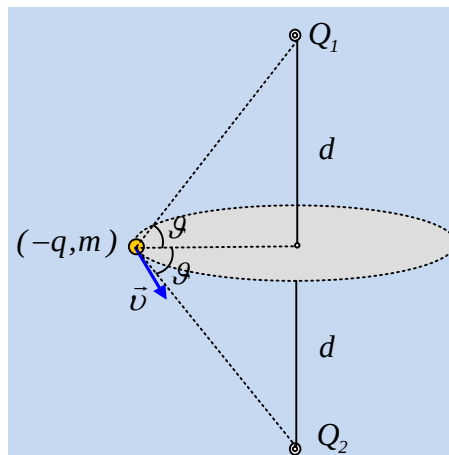


Τρία φορτία σε αλληλεπίδραση και κυκλική κίνηση

Δυο θετικά φορτία $Q_1=2Q$, $Q_2=Q$ βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο και συγκρατούνται σε απόσταση $2d$.

Τρίτο φορτίο $-q$ που είναι αποθηκευμένο σε σφαιρίδιο μάζας m εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα u και από απόσταση R από την κατακόρυφο που διέρχεται από τα δύο φορτία και κάθετα στο επίπεδο των τριών φορτίων. Το σημείο εκτόξευσης

ισαπέχει από τα φορτία Q_1 , Q_2 . Παρατηρούμε ότι η κίνηση του φορτισμένου σφαιριδίου είναι ομαλή κυκλική. Να υπολογίσετε:



1. την ταχύτητα εκτόξευσης u και τη συχνότητα περιστροφής
2. τα φορτία Q_1 και Q_2
3. Την κινητική ενέργεια εκτόξευσης του σφαιριδίου καθώς και την μηχανική ενέργειά του
4. Αν κάποια στιγμή συνδέσουμε με αγωγό τα φορτία Q_1 και Q_2 , το φορτισμένο κινούμενο σφαιρίδιο, θα συνεχίσει την κυκλική κίνησή του στην ίδια τροχιά ή όχι;

Δεδομένα: $R=d=0,1\text{m}$, $Q_1=2Q$, $Q_2=Q$, $q= -10^{-8}\text{C}$, $m=10^{-3}\text{kg}$, $g=10\text{m/s}^2$, ενώ τα αρχικά δυναμικά των φορτισμένων σωμάτων που φέρουν τα φορτία Q_1 και Q_2 είναι διαφορετικά.

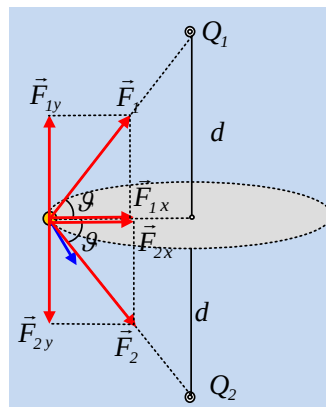
Απάντηση:

Στο σφαιρίδιο ασκούνται οι δυνάμεις Coulomb F_1, F_2 από τα Q_1, Q_2 αντίστοιχα και το βάρος mg . Είναι

$$F_1 = \frac{kQ_1|q|}{r^2} \quad \text{και} \quad F_2 = \frac{kQ_2|q|}{r^2}$$

,και $r^2 = R^2 + d^2$ οπότε $r=0,1\sqrt{2}$ m

$$F_1 = \frac{kQ_1|q|}{R^2+d^2} \quad \text{και} \quad F_2 = \frac{kQ_2|q|}{R^2+d^2}$$



Αναλύουμε τις δυνάμεις σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα την κάθε μια.

$$F_{1x} = F_1 \sin \theta = \frac{kQ_1|q|}{R^2+d^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2+d^2}} = \frac{kQ_1|q|R}{(R^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_{2x} = F_2 \sin \theta = \frac{kQ_2|q|}{R^2+d^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2+d^2}} = \frac{kQ_2|q|R}{(R^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Στην οριζόντια διεύθυνση η συνισταμένη αυτών είναι η κεντρομόλος δύναμη

$$F_k = \sum F_x = F_{1x} + F_{2x} = \frac{kQ_1|q|R}{(R^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{kQ_2|q|R}{(R^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k(Q_1+Q_2)|q|R}{(R^2+d^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{Όμως } F_k = \frac{mu^2}{R} \quad \text{άρα} \quad \frac{k(Q_1+Q_2)|q|R}{(R^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{mu^2}{R} \quad (1)$$

Στον κατακόρυφο άξονα οι δυνάμεις ισορροπούν, άρα

$$\sum F_y = F_{1y} - F_{2y} - mg = 0$$

$$F_{1y} - F_{2y} = mg$$

$$F_1 \eta \mu \theta - F_2 \eta \mu \theta = mg \quad \text{ή} \quad (F_1 - F_2) \eta \mu \theta = mg \quad \text{ή}$$

$$\frac{k(Q_1 - Q_2)|q|}{R^2 + d^2} \frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}} = mg$$

$$\text{άρα} \quad \frac{k(Q_1 - Q_2)|q|d}{(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} = mg \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις (1) και (2) κι έχουμε

$$\frac{(Q_1+Q_2)R}{(Q_1-Q_2)d} = \frac{\frac{mu^2}{R}}{mg} \quad \text{ή} \quad \frac{(Q_1+Q_2)R}{(Q_1-Q_2)d} = \frac{u^2}{gR} \quad \text{άρα}$$

$$u = R \sqrt{\frac{(Q_1+Q_2)g}{(Q_1-Q_2)d}} \quad \text{ή} \quad u = R \sqrt{\frac{3g}{d}}$$

$$u = 0,1 \sqrt{\frac{30}{0,1}} = \sqrt{3} \text{ m/s}$$

Είναι $u=2\pi Rf$ οπότε $f = \frac{u}{2\pi R} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi \cdot 0,1} = 2,75 \text{ Hz}$

2. Από (2) έχουμε $\frac{k(2Q-Q)|q|d}{(R^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} = mg$ ή

$$Q = \frac{mg(R^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}{k|q|d} = \frac{10^{-2} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot 10^{-\frac{3}{2}}}{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-8} \cdot 0,1} = \frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{10}} 10^{-3}$$

$$Q_2 = 9,93 \cdot 10^{-5} \text{ C} \quad \text{και} \quad Q_1 = 19,86 \cdot 10^{-5} \text{ C}$$

3. Η κινητική ενέργεια του σφαιριδίου είναι

$$K = \frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} 10^{-3} 3 = 1,5 10^{-3} \text{ J}$$

Η δυναμική ενέργεια του σφαιριδίου είναι: $U = q(V_1 + V_2) = q\left(\frac{kQ_1}{r} + \frac{kQ_2}{r}\right) = \frac{3kQq}{r}$

$$U = \frac{3 \cdot 9 \cdot 10^9}{0,1\sqrt{2}} 9,93 \cdot 10^{-5} (-10^{-8}) = -189,6 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

άρα η ολική ενέργεια (μηχανική) του σφαιριδίου είναι:

$$E = K + U = -0,188 \text{ J}.$$

4. Όταν συνδέσουμε τα φορτία Q_1, Q_2 θα ανακατανεμηθεί το φορτίο έτσι που οι δυνάμεις Coulomb να μεταβληθούν με αποτέλεσμα να μην υπάρχει ισορροπία στον άξονα y καθώς και στην οριζόντια διεύθυνση οι συνιστώσες των δυνάμεων Coulomb να μεταβληθούν και να μην είναι η κεντρομόλος δύναμη. Έτσι το σφαιρίδιο θα πάψει να κινείται στην κυκλική τροχιά ακτίνας

$R=0,1\text{m}$ και θα κάνει πολύπλοκη κίνηση , δέσμια όμως των ακίνητων φορτίων ,γιατί η ολική μηχανική ενέργειά του είναι αρνητική.

Κορκίζογλου Πρόδρομος

prodkork@hotmail.com