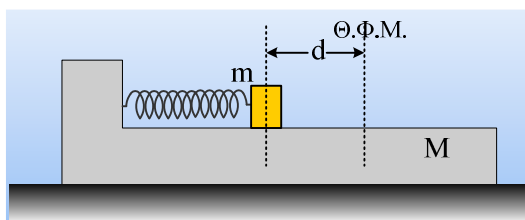


ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΠΑΝΩ ΣΕ ΣΩΜΑ ΚΑΙ ΟΡΙΑΚΗ ΤΡΙΒΗ

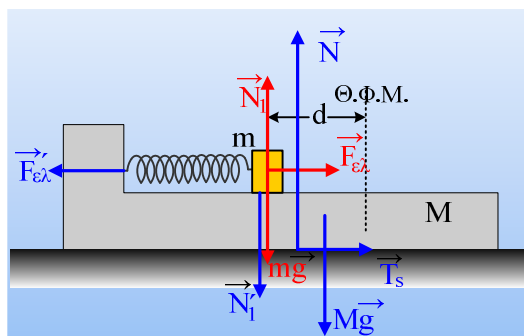


Σανίδα μάζας $M=4\text{kg}$ βρίσκεται πάνω σε δάπεδο με το οποίο παρουσιάζει τριβές με συντελεστή οριακής τριβής $\mu_{\text{op.}}=0,8$. Πάνω σ' αυτό ισορροπεί άλλο σώμα μάζας $m=1\text{kg}$, το οποίο είναι δεμένο με ελατήριο σταθεράς $k=100\text{N/m}$ και φυσικού μήκους $L_0=1\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε προεξοχή του σώματος M στο άκρο του. Μεταξύ των σωμάτων δεν υπάρχει τριβή. Συσπειρώνουμε το ελατήριο κατά d και τη στιγμή $t=0$ αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

1. Ποια η μέγιστη τιμή του d ώστε η σανίδα να μην ολισθήσει στο δάπεδο.
2. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος θεωρώντας το πλάτος ίσο με d_{max} και θετική φορά προς τα δεξιά.
3. Πόση είναι η στατική τριβή τη στιγμή t_1 που το σώμα m έχει διανύσει απόσταση $1,5d_{\text{max}}$; Ποια η χρονική στιγμή t_1 Να κάνετε γραφική παράσταση της στατικής τριβής σε συνάρτηση της απομάκρυνσης x .
4. Επαναλαμβάνουμε τοποθετώντας τη σανίδα σε επιφάνεια με την οποία δεν παρουσιάζει τριβή. Αφήνουμε το σώμα m να κινηθεί τη χρονική στιγμή $t=0$ από τη θέση που έχουμε συσπειρώσει το ελατήριο κατά d_{max} . Πόση είναι η ταχύτητά του όταν το ελατήριο αποκτήσει το φυσικό του μήκος; Ποια χρονική στιγμή θα συμβεί αυτό; Δίνεται ότι, αν ένα ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους L_0 , το κόψουμε σε δύο τμήματα μηκών L_1 και L_2 και σταθερών k_1 , k_2 αντίστοιχα, τότε ισχύει: $k_1L_1=k_2L_2=kL_0$

Απάντηση:



1. Στο σώμα m ασκούνται οι δυνάμεις: Βάρος mg , η κάθετη αντίδραση N_1 , η δύναμη του ελατηρίου $F_{ελ}$.

Στη σανίδα ασκούνται οι δυνάμεις: Βάρος Mg , κάθετη αντίδραση N από το δάπεδο, η δύναμη του ελατηρίου $F_{ελ}$, η στατική τριβή T_s , η $N_1' = N_1$ (δράση-αντίδραση). Για να μη κινηθεί η σανίδα πρέπει:

$$T_s \leq F_{ελ} \text{ ή } \mu_{op} N \geq kd$$

όμως $\Sigma F_y = 0$ άρα $N = Mg + N_1'$ και επειδή $N_1 = mg = N_1'$ έχουμε: $\mu_{op} \cdot (M+m)g \geq kd$ άρα

$$d_{max} = \frac{\mu_{op} \cdot (M+m)g}{k} \text{ και με αντικατάσταση } d_{max} = \frac{0,8 \cdot 50}{100} = 0,4m.$$

2. Είναι $A = d_{max} = 0,4m$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10r/s$, και για $t=0$ είναι $x=-A$ άρα $\phi_0 = 3\pi/2$.

Επομένως έχουμε: $x = A \eta \mu(\omega t + \phi_0)$ ή $x = 0,4 \eta \mu(10t + \frac{3\pi}{2})$ s.i.

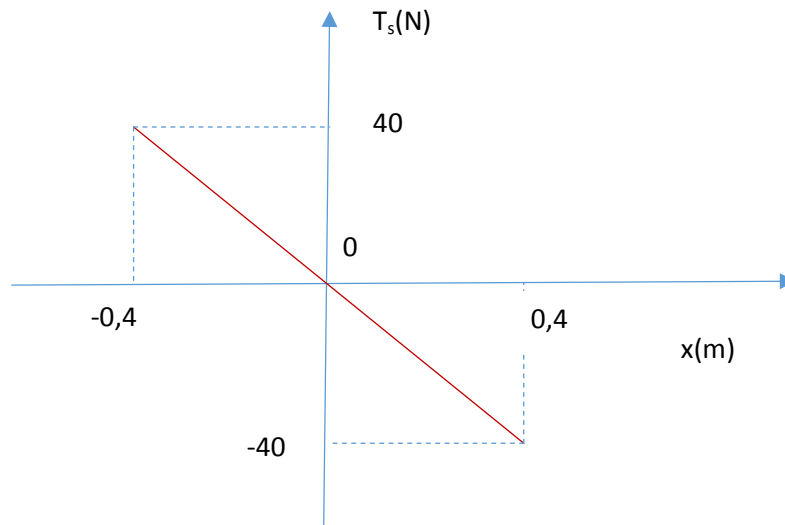
3. Όταν το σώμα έχει διανύσει απόσταση $1,5d_{max}$ η απομάκρυνση θα είναι $x = A/2 = 0,2m$ άρα $F_{ελ} = kx = 100 \cdot 0,2 = 20N$. Όμως το σώμα M ισορροπεί, άρα θα έχουμε :

$$T_s = F_{ελ} = -20N.$$

Θέτουμε στην εξίσωση της απομάκρυνσης $x = +0,2m$ κι έχουμε:

$$0,2 = 0,4 \eta \mu(10t_1 + 3\pi/2) \text{ ή } 10t_1 + 3\pi/2 = 2\pi + \pi/6 \text{ ή } 10t_1 = 2\pi/3 \text{ άρα } t_1 = \frac{\pi}{15} s.$$

Για κάθε θέση ισχύει $\Sigma F = 0$ για το σώμα M . Άρα $T_s = -F_{ελ} = -kx = -100x$ $x \in [-0,2m, +0,2m]$. Η γραφική παράσταση της $T_s = f(x)$ είναι:



4. Το σύστημα M,m ,ελατήριο είναι μονωμένο εφόσον δεν έχουμε τριβές με το δάπεδο. Άρα η ορμή του διατηρείται καθώς και η μηχανική ενέργεια. Έτσι:

$$p_{ολ.αρχ.} = p_{ολ.τελ.} \quad \text{ή} \quad 0 = mu - MV \quad V = \frac{mu}{M} \quad (1)$$

$$E_{μηχ.αρχ.} = E_{μηχ.τελ.} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}MV^2 \quad \text{ή λόγω της (1) έχουμε:}$$

$$kd^2 = mu^2 + \frac{m^2u^2}{M} \rightarrow u = d \sqrt{\frac{k}{m(1+\frac{m}{M})}} \quad \text{και με αντικατάσταση:}$$

$$u = 0,4 \sqrt{\frac{100 \cdot 4}{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{5} = 3,2\sqrt{5} \frac{m}{s}$$

Το κέντρο μάζας του συστήματος δεν μετατοπίζεται γιατί είναι μονωμένο. Η θέση του c.m. θα βρεθεί ως εξής:

$$md_1 = Md_2 \quad \text{ή} \quad md_1 = M(d-d_1) \quad \text{ή} \quad d_1 = \frac{Md}{M+m} = \frac{4 \cdot 0,4}{5} = 0,32m$$

Η θέση του c.m. είναι στην ίδια κατακόρυφη που είναι η θέση Ο του ελατηρίου που μένει αμετακίνητη στο χώρο και απέχει από το σημειακό σώμα m απόσταση $d_1 = 0,32m$. Το ερώτημα που γεννιέται είναι, πόση είναι η σταθερά του ελατηρίου k_1 που ταλαντώνει τη μάζα m. Είναι :

$$k_1L_1 = k_2L_2 = kL_0 \quad \text{ή} \quad k_1 = kL_0/L_1 = kL_0/d_1 = 100 \cdot 1/0,32 = 10^4/32 \text{ N/m}.$$

$$\text{Η περίοδος του m είναι: } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{32}{10^4}} = 2\pi \cdot 4\sqrt{2} \cdot 10^{-2} = 8\pi\sqrt{2} \cdot 10^{-2} \text{ s.}$$

$$\text{Άρα ο χρόνος που απαιτείται είναι } T/4 = 2\pi\sqrt{2} \cdot 10^{-2} \text{ s} = 0,088 \text{ s.}$$