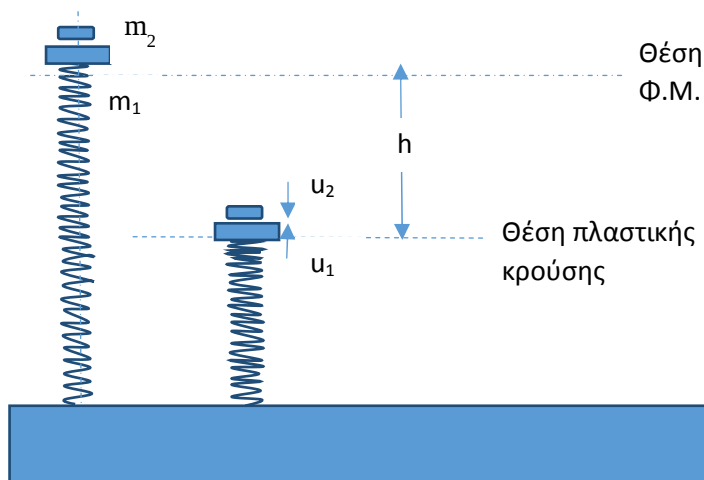


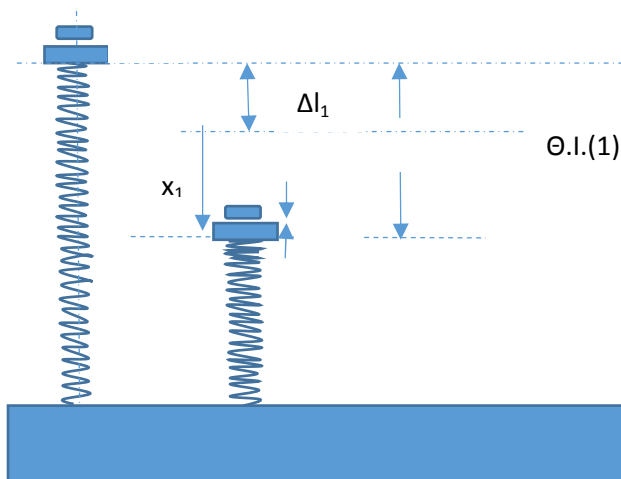
ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ-ΚΡΟΥΣΗ... ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΤΙΠΟΤΑ!!



Στο σχήμα απεικονίζεται κατακόρυφο ελατήριο, στη θέση φυσικού μήκους(θ.Φ.Μ.), με το κάτω άκρο δεμένο στο δάπεδο, ενώ στο πάνω έχουμε προσδέσει σώμα μάζας m_1 . Αφήνουμε το σώμα να κινηθεί τη χρονική στιγμή $t_0=0$ και τη χρονική στιγμή t_2 αφήνουμε από το ίδιο σημείο, να κάνει ελεύθερη πτώση το σώμα μάζας m_2 . Τα σώματα συγκρούονται πλαστικά και ακαριαία τη χρονική στιγμή t_1 , πριν ολοκληρώσει πλήρη ταλάντωση το σώμα m_2 , και αμέσως μετά την κρούση τους ισορροπούν. Δίνονται: $m_1=0,4\text{kg}$, $k=40\text{N/m}$, $g=10\text{m/s}^2$. Να υπολογίσετε:

1. Τη μάζα m_2
2. Τη θέση που έγινε η κρούση
3. Τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2
4. Την απώλεια μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση
5. Τη θέση του σώματος μάζας m_2 τη στιγμή που το m_1 σταμάτησε στιγμιαία για πρώτη φορά.

Απάντηση:



1. Εφ' όσον το σύστημα ακινητοποιείται και ισορροπεί μετά την κρούση, η θέση κρούσης είναι η θέση ισορροπίας του συστήματος.

Θέση ισορροπίας του σώματος μάζας m_1 είναι: $\Sigma F=0$ ή $F_{\text{ελατ.}}=W_1$ ή $k\Delta l_1=m_1g$

$$\text{ή } \Delta l_1 = \frac{m_1 g}{k} = 0,1 \text{ m.}$$

$$\text{Η θέση ισορροπίας του συστήματος είναι: } kh = (m_1 + m_2)g \rightarrow h = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \quad (1)$$

$$\text{Οπότε η απομάκρυνση του } m_1 \text{ τη στιγμή της κρούσης είναι: } x_1 = h - \Delta l_1 = \frac{m_2 g}{k} \quad (2)$$

Το πλάτος ταλάντωσης του m_1 είναι $A_1 = \Delta l_1 = 0,1 \text{ m}$, γιατί τη στιγμή $t=0$, το m_1 βρισκότανε στην πάνω ακραία θέση του.

Για την κρούση ισχύει η Αρχή Διατήρησης της ορμής: $p_{\text{ολ.αρχ.}} = p_{\text{ολ.τελ.}}$ ή

$$0 = m_1 u_1 - m_2 u_2 \quad \text{ή} \quad u_1 = \frac{m_2 u_2}{m_1} \quad (3)$$

Το σώμα (2) κάνει ελεύθερη πτώση, άρα: $h = \frac{1}{2} g \Delta t_2^2$ και $u_2 = g \Delta t_2$ και από εδώ

$$\text{παίρνουμε } u_2 = \sqrt{2gh} \text{ και λόγω της (3) έχουμε: } u_2 = \sqrt{2g \left(\frac{(m_1 + m_2)g}{k} \right)} \quad (4) \text{ άρα η (3)}$$

γίνεται:

$$u_1 = \frac{m_2 g}{m_1} \sqrt{2 \left(\frac{(m_1 + m_2)}{k} \right)} \quad (5)$$

Για την ταλάντωση του m_1 ισχύει η Α.Δ.Ε.Τ.: $E_T = K_T + U_T$ ή $\frac{1}{2} k A_1^2 = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} m_1 u_1^2$ και λόγω

$$\text{των (2), (5) έχουμε: } k A_1^2 = k \frac{(m_2 g)^2}{k^2} + m_1 \left(\frac{m_2 g}{m_1} \sqrt{2 \left(\frac{(m_1 + m_2)}{k} \right)} \right)^2 \quad \text{ή}$$

$$k \left(\frac{m_1 g}{k} \right)^2 = \frac{(m_2 g)^2}{k} + \frac{2 m_2^2 (m_1 + m_2) g^2}{m_1 k} \quad \text{ή} \quad m_1^2 - m_2^2 = \frac{2 m_2^2}{m_1} (m_1 + m_2) \quad \text{ή}$$

$$(m_1 + m_2) (m_1 - m_2) = \frac{2 m_2^2}{m_1} (m_1 + m_2) \quad \text{ή} \quad m_1 - m_2 = \frac{2 m_2^2}{m_1} \quad \text{ή} \quad 2 m_2^2 + m_1 m_2 - m_1^2 = 0$$

$$\text{Η θετική ρίζα της εξίσωσης είναι: } m_2 = \frac{m_1}{2} \quad \text{ή} \quad m_2 = 0,2 \text{ kg.}$$

2. Από την (1) βρίσκουμε: $h = 0,15 \text{ m}$.

3. Από τη σχέση $h = \frac{1}{2} g \Delta t_2^2$ έχουμε: $\Delta t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{0,3}{10}} = 0,1\sqrt{3} \text{ s}$.

Η απομάκρυνση x_1 είναι: $x_1 = \frac{m_2 g}{k} = 0,05 \text{ m}$. Η εξίσωση απομάκρυνσης του σώματος (1) είναι: $x_1 = A_1 \eta \mu(\omega t + \phi_0)$. Για $t=0$ είναι $x_1 = A_1$ (θετική φορά προς τα πάνω), οπότε $\phi_0 = \pi/2$. Στη θέση κρούσης είναι

$$x_1 = \frac{m_2 g}{k} = -0,05 \text{ m} = -0,1 \eta \mu \left(\omega t_1 + \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{άρα} \quad \eta \mu \left(\omega t_1 + \frac{\pi}{2} \right) = -1/2$$

$$\text{και επειδή η ταχύτητα } u_1 > 0 \text{ έχουμε: } \omega t_1 + \frac{\pi}{2} = 2\pi - \pi/6 \quad \text{ή} \quad \omega t_1 = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\text{Όμως } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10 \text{ rad/s} \quad \text{άρα} \quad t_1 = \frac{4\pi}{30} = \frac{2\pi}{15} \text{ s}.$$

Η χρονική στιγμή που αφήσαμε το (2) είναι $t_2 = 0,245 \text{ s}$.

$$t_2 = t_1 - \Delta t_2 = \frac{2\pi}{15} - 0,1\sqrt{3} = \frac{2\pi - 1,5\sqrt{3}}{15} = 0,245 \text{ s}$$

=Η ταχύτητα του (2) είναι: $u_2 = g\Delta t_2 = \sqrt{3} \text{ m/s}$, οπότε η κινητική ενέργειά του είναι:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = 0,3 \text{ J. Η ταχύτητα του (1) τη στιγμή της κρούσης είναι:$$

$$u_1 = \omega A_1 \sin\left(\omega t_1 + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \cdot \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s, και η κινητική}$$

$$\text{ενέργειά του: } K_1 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} 0,4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0,15 \text{ J.}$$

Επειδή $K_{\text{ολ. τ.ε.λ.}} = 0$ η μηχανική ενέργεια που χάθηκε κατά την κρούση είναι:

$$\Delta E = K_1 + K_2 = 0,45 \text{ J.}$$

4. Το σώμα (1) σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\frac{2\pi}{\omega}}{2} = \frac{\pi}{10} \text{ s. Στιγμή αυτή το σώμα (2) κινήθηκε για χρονικό διάστημα:}$$

$$t_2' = t - t_2 = \frac{\pi}{10} \text{ s} - 0,245 \text{ s} = 0,069 \text{ s, και επομένως θα έχει μετατοπισθεί κατά:}$$

$$y = \frac{1}{2} g (t_2')^2 = 5 \cdot 0,069^2 = 2,38 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 2,38 \text{ cm.}$$

Κορκίζογλου Πρόδρομος
7^ο Γ.Ε.Λ. Ν. Σμύρνης
prodkork@hotmail.com