

ΤΡΙΑΔΕΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΠΟΥ ΕΠΑΛΗΘΕΥΟΥΝ ΤΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Θα αποδείξουμε ότι οι τριάδες των φυσικών αριθμών που επαληθεύουν το πυθαγόρειο θεώρημα έχουν μία από τις ακόλουθες σχέσεις: ή 1. ο μεγαλύτερος αριθμός είναι μεγαλύτερος κατά μία μονάδα του μεσαίου, όταν ο μικρότερος είναι περιττός, ή 2. ο μεγαλύτερος αριθμός είναι μεγαλύτερος κατά δύο μονάδες του μεσαίου, αν ο μικρότερος είναι άρτιος αριθμός, ή 3. οι τρεις αριθμοί προκύπτουν από τους τρεις αριθμούς μιας εκ των δύο προηγούμενων περιπτώσεων αν (οι τελευταίοι) πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό. Μάλιστα ο μεγαλύτερος αριθμός είναι τόσες μονάδες μεγαλύτερος του μεσαίου, όσο είναι και ο αριθμός που πρέπει να πολλαπλασιάσει τους αριθμούς της τριάδας της πρώτης (1) περίπτωσης για να προκύψουν οι αριθμοί της προς εξέταση τριάδας ή είναι ίσος με το διπλάσιου του αριθμού με τον οποίο πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τους αριθμούς της τριάδας της δεύτερης (2) περίπτωσης για να προκύψουν οι αριθμοί της προς εξέταση τριάδας (δηλαδή ο αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε ισούται με το μισό της διαφοράς που αναφέρθηκε).

Παράδειγμα της περίπτωσης 1:

Στην τριάδα: 5, 12, 13: $5^2 + 12^2 = 13^2 \Leftrightarrow 25 + 144 = 169$, ο μεγαλύτερος (ο 13) είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτερος του μεσαίου (του 12: $13 = 12 + 1$), ενώ ο μικρότερος είναι περιττός (ο 5).

Παράδειγμα της περίπτωσης 2:

Στην τριάδα: 8, 15, 17: $8^2 + 15^2 = 17^2 \Leftrightarrow 64 + 225 = 289$, ο μεγαλύτερος (ο 17) είναι κατά δύο μονάδες μεγαλύτερος του μεσαίου (του 15: $17 = 15 + 2$), ενώ ο μικρότερος είναι άρτιος (ο 8).

1^ο παράδειγμα της περίπτωσης 3:

Στην τριάδα: 50, 120, 130: $50^2 + 120^2 = 130^2 \Leftrightarrow 2500 + 14400 = 16900$, ενώ ο μεγαλύτερος (ο 130) είναι κατά 10 μονάδες μεγαλύτερος του μεσαίου (του 120: $130 = 120 + 10$), και όχι μία ή δύο μονάδες, οι τρεις αυτοί αριθμοί εξάγονται με πολλαπλασιασμό της τριάδας 5, 12, 13 με τον αριθμό 10, όσες μονάδες είναι μεγαλύτερος ο 130 από τον 120.

2^ο παράδειγμα της περίπτωσης 3:

Στην τριάδα: 80, 150, 170: $80^2 + 150^2 = 170^2 \Leftrightarrow 6400 + 22500 = 28900$, ενώ ο μεγαλύτερος (ο 170) είναι κατά 20 μονάδες μεγαλύτερος του μεσαίου (του 150: $170 = 150 + 20$), και όχι μία ή δύο μονάδες, οι τρεις αυτοί αριθμοί εξάγονται με πολλαπλασιασμό της τριάδας 8, 15, 17 με τον αριθμό 10, δηλαδή με τη μισή τιμή του 20 που αναφέρθηκε.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Προφανώς ο a είναι ο μεγαλύτερος: $b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow a^2 > b^2, a^2 > c^2 \Rightarrow a > b, a > c$.

Επίσης δεν μπορεί να είναι $b = c$, διότι τότε:

$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow b^2 + b^2 = a^2 \Rightarrow 2b^2 = a^2 \Rightarrow \sqrt{2}b = a$, άρα ο a ή οι b, c είναι ασύμμετροι και όχι φυσικοί αριθμοί.

Έστω $b < c$, και $a = c + d$ (όπου $d =$ φυσικός αριθμός). Τότε:

$$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = (c + d)^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = d \cdot 2c + d^2$$

Επειδή ο b είναι φυσικός αριθμός και $2c + d > d$, πρέπει: $2c + d = d \cdot e^2$, (όπου $e =$ φυσικός αριθμός) ώστε: $b^2 = d \cdot 2c + d \Rightarrow b^2 = d \cdot d \cdot e^2 \Rightarrow b^2 = d^2 \cdot e^2 \Rightarrow b = d \cdot e$.

Επίσης:

$$2c + d = d \cdot e^2 \Rightarrow 2c = d \cdot e^2 - d \Rightarrow 2c = d \cdot e^2 - 1 \Rightarrow c = \frac{d \cdot e^2 - 1}{2} \Rightarrow a = c + d = \frac{d \cdot e^2 - 1}{2} + d$$

$$\Rightarrow a = c + d = \frac{d \cdot e^2 - 1}{2} + \frac{2d}{2} \Rightarrow a = c + d = \frac{d \cdot e^2 + 1}{2}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τον αριθμό d (να είναι άρτιος ή περιττός):

Στην περίπτωση που ο d είναι άρτιος: $d = 2f$, έχουμε:

$$b = d \cdot e \Rightarrow b = 2f \cdot e$$

$$c = \frac{d \cdot e^2 - 1}{2} \Rightarrow c = \frac{2f \cdot e^2 - 1}{2} \Rightarrow c = f \cdot e^2 - 1$$

$$a = c + d = \frac{d \cdot e^2 + 1}{2} \Rightarrow a = c + d = \frac{2f \cdot e^2 + 1}{2} \Rightarrow a = c + d = f \cdot e^2 + 1$$

Στην υποπερίπτωση που $f = 1$, τότε $d = 2$:

$b' = 2 \cdot e, c' = e^2 - 1, a' = e^2 + 1$, οπότε ο a είναι μεγαλύτερος του c κατά δύο μονάδες

$$a' - c' = d = 2, \text{ ή } a' - c' = e^2 + 1 - e^2 - 1 = 2.$$

Στην υποπερίπτωση που $f \neq 1$, τότε οι τρεις αριθμοί:

$b = 2f \cdot e, c = f \cdot e^2 - 1, a = c + d = f \cdot e^2 + 1$, έχουν προέλθει από τους τρεις προηγούμενους αριθμούς: $b' = 2 \cdot e, c' = e^2 - 1, a' = e^2 + 1$ με πολλαπλασιασμό με το f .

Στην περίπτωση που ο d είναι περιττός: $d = 2f + 1$, έχουμε:

$$b = d \cdot e \Rightarrow b = 2f + 1 \cdot e$$

$$c = \frac{d \cdot e^2 - 1}{2} \Rightarrow c = \frac{2f + 1 \cdot e^2 - 1}{2}$$

$$a = c + d = \frac{d \cdot e^2 + 1}{2} \Rightarrow a = c + d = \frac{2f + 1 \cdot e^2 + 1}{2}$$

Προφανώς για να είναι ο a και ο c φυσικοί αριθμοί, πρέπει (αφού ο d είναι περιττός), ο $e^2 - 1$ και

ο $e^2 + 1$ να είναι άρτιοι: $e^2 - 1 = 2g \Rightarrow e^2 = 2g + 1 \Rightarrow e^2 + 1 = 2g + 2 \Rightarrow e^2 + 1 = 2 \cdot g + 1$

και $e^2 = 2g + 1 \Rightarrow e = \sqrt{2g + 1}$ Προφανώς οι σχέσεις γίνονται:

$$b = 2f + 1 \cdot e \Rightarrow b = 2f + 1 \cdot \sqrt{2g + 1}$$

$$c = \frac{2f + 1 \cdot e^2 - 1}{2} \Rightarrow c = \frac{2f + 1 \cdot 2g}{2} \Rightarrow c = 2f + 1 \cdot g$$

$$a = c + d = \frac{2f + 1 \cdot e^2 + 1}{2} \Rightarrow a = c + d = \frac{2f + 1 \cdot 2 \cdot g + 1}{2} \Rightarrow a = c + d = 2f + 1 \cdot g + 1$$

Παρατήρηση: Βεβαίως για να είναι ο b φυσικός αριθμός, πρέπει ο e να είναι περιττός: $e = 2h + 1$, διότι αν ήταν άρτιος, τότε το e^2 θα ήταν άρτιος και όχι περιττός, αφού: $e^2 = 2g + 1$.

Προφανώς αν: $f = 0$, δηλαδή: $d = 1$ (αφού είναι περιττός), τότε οι αριθμοί a' και c' διαφέρουν κατά 1.

Στην υποπερίπτωση που $f \neq 0$, δηλαδή: $d \neq 1$ οι τρεις αριθμοί:

$b = 2f + 1 \cdot \sqrt{2g + 1}, c = 2f + 1 \cdot g, a = c + d = 2f + 1 \cdot g + 1$, έχουν προέλθει από τους

αριθμούς: $b' = \sqrt{2g + 1}, c' = g, a' = g + 1$ με πολλαπλασιασμό με το $d = 2f + 1$. Πάλι παρατηρούμε ότι οι a', c' έχουν διαφορά ίση με 1: $a' - c' = g + 1 - g = 1$.

Εύρεση τριάδας αριθμών που υπακούουν στο πυθαγόρειο θεώρημα, όταν είναι γνωστός ο ένας από τους τρεις αριθμούς

Έστω ότι ο δοθέντας αριθμός είναι ο λ . Για την εύρεση των άλλων δύο ακολουθείται η διαδικασία: Αν μεν ο λ είναι άρτιος: $\lambda = 2\mu$, τότε υψώνουμε το μ στο τετράγωνο και προσθαφαιρούμε το 1. Για παράδειγμα: αν $\lambda = 8$, τότε $\mu = 4$, $\mu^2 = 16$, άρα οι άλλοι αριθμοί είναι το 15 και το 17 (16-

1=15, 16+1=17). Ισχύει ο τύπος: $\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \pm 1$. Αν όμως ο λ είναι περιττός, τότε υψώνεται στο τετράγωνο ο ίδιος αριθμός, διαιρούμε το αποτέλεσμα με το δύο (παίρνουμε το μισό του) και στη συνέχεια προσθαφαιρούμε το 0,5 (ή μετά την ύψωση στο τετράγωνο προσθαφαιρούμε το 1 και παίρνουμε το μισό του εξαγόμενου. Για παράδειγμα: αν $\lambda = 7$, τότε: $7^2 = 49$, $49/2 = 24,5$, $24,5 \pm 0,5 = 24, 25$ ή $49 \pm 1 = 50, 48$, $50/2=25$, $48/2 = 24$. Ισχύει ο τύπος: $\frac{\lambda^2 \pm 1}{2} = \frac{\lambda^2}{2} \pm \frac{1}{2}$.

Πυθαγόρειες τριάδες με αριθμούς μέχρι και το 100 (είναι 43 τριάδες).

3	4	5
6	8	10
9	12	15
12	16	20
15	20	25
18	24	30
21	28	35
24	32	40
27	36	45
30	40	50
33	44	55
36	48	60
39	52	65
42	56	70
45	60	75
48	64	80
51	68	85
54	72	90
57	76	95
60	80	100
5	12	13
10	24	26
15	36	39
20	48	52
25	60	65
30	72	78
35	84	91
7	24	25
14	48	50
21	72	75
28	96	100
8	15	17
16	30	34
24	45	51
32	60	68
40	75	85
9	40	41
18	80	82
11	60	61
12	35	37
24	70	74
13	84	85
16	63	65