

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΤΗ ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΑΙ ΤΟ ΣΤΑΣΙΜΟ
(στις παρυφές του σχολικού)

1) Στην επιφάνεια ενός υγρού ηρεμούν δύο πηγές κυμάτων O_1 και O_2 , οι οποίες μπορούν να εκτελέσουν κατακόρυφες αρμονικές ταλαντώσεις πλάτους A και συχνότητας f . Κάποια στιγμή που θεωρούμε $t=0$, η πηγή O_1 αρχίζει να ταλαντώνεται κινούμενη προς τα πάνω. Η πηγή O_2 αρχίζει να ταλαντώνεται προς τα πάνω, τη στιγμή που η O_1 περνά για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας της κινούμενη προς τα κάτω. Στην επιφάνεια του υγρού διαδίδονται έτσι δύο κύματα, τα οποία δεχόμαστε ότι διατηρούν σταθερό πλάτος.

A) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα κύματα που δημιουργούνται.

B) Ποιο το πλάτος ταλάντωσης του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν οι δύο πηγές;

Γ) Ποια σχέση συνδέει τις αποστάσεις r_1 και r_2 από τις δύο πηγές των σημείων της επιφάνειας του υγρού, που βρίσκονται πάνω σε υπερβολές ακυρωτικής συμβολής;

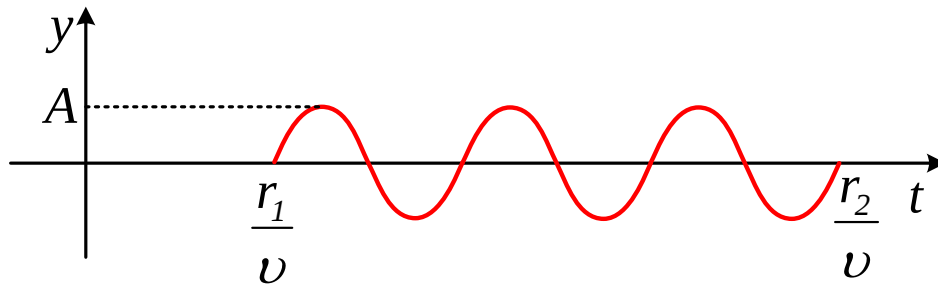
2) Στην επιφάνεια ενός υγρού διαδίδονται δύο κύματα που προέρχονται από δύο σύγχρονες πηγές, O_1 και O_2 , οι οποίες εκτελούν αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης $y_1=y_2=A\eta\mu\omega t$. Για τα κύματα αυτά δεχόμαστε ότι διατηρούν σταθερό πλάτος και έχουν μήκος κύματος λ .

A) Αν η απόσταση d μεταξύ των πηγών είναι $d=3(\lambda/2)$, ποιο το πλάτος ταλάντωσης των σημείων της ευθείας που ορίζουν οι δύο πηγές και δεν ανήκουν στο ευθύγραμμο τμήμα O_1O_2 ;

B) Αν διπλασιαστεί η συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών, ποιο το νέο πλάτος ταλάντωσης των σημείων της ευθείας που ορίζουν οι δύο πηγές και δεν ανήκουν στο ευθύγραμμο τμήμα O_1O_2 ;

3) Στην επιφάνεια ενός υγρού διαδίδονται δύο κύματα που προέρχονται από δύο σύγχρονες πηγές, O_1 και O_2 , οι οποίες εκτελούν αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης $y_1=y_2=A\eta\mu\omega t$. Για τα κύματα αυτά δεχόμαστε ότι διατηρούν σταθερό πλάτος.

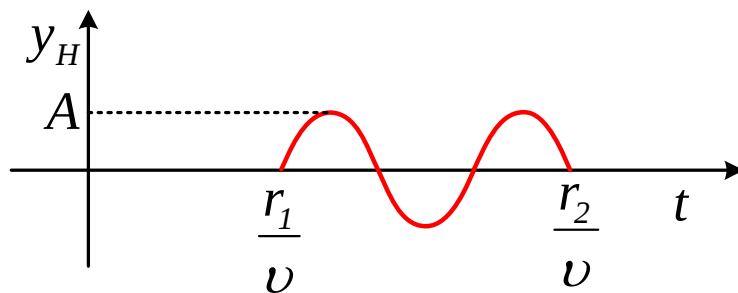
A) Ένα σημείο M απέχει από τις δύο πηγές αποστάσεις r_1 και r_2 , όπου $r_2 > r_1$. Το επόμενο σχήμα δείχνει την απομάκρυνση y_M του σημείου M , από τη στιγμή $t=0$, οπότε αρχίζουν να ταλαντώνονται οι πηγές, μέχρι τη στιγμή t_2 , οπότε φθάνει στο M το κύμα από την πιο μακρινή πηγή O_2 .



Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης του Μ, μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό.

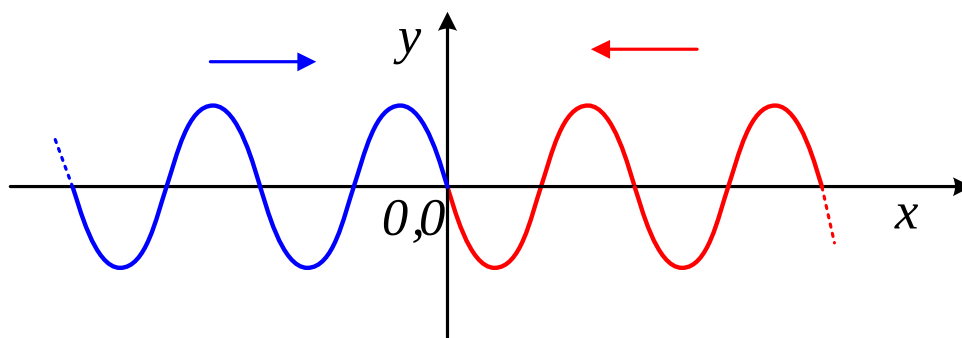
Β) Ένα σημείο Η απέχει από τις δύο πηγές αποστάσεις r_1 και r_2 , όπου $r_2 > r_1$.

Το επόμενο σχήμα δείχνει την απομάκρυνση y_H του σημείου Η, από τη στιγμή $t=0$, οπότε αρχίζουν να ταλαντώνονται οι πηγές, μέχρι τη στιγμή t_2 , οπότε φθάνει στο Η το κύμα από την πιο μακρινή πηγή O_2 .



Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης του Η, μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό.

4) Κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου χ'χ, διαδίδονται δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα y_1 και y_2 . Το κύμα y_1 διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα, θέτοντας κάθε σημείο του μέσου σε αρμονική ταλάντωση ξεκινώντας προς τα πάνω. Το y_2 διαδίδεται κατά την αρνητική φορά του άξονα, θέτοντας κάθε σημείο του μέσου σε αρμονική ταλάντωση ξεκινώντας προς τα κάτω. Τα δύο κύματα τη χρονική στιγμή $t=0$, συναντώνται σε σημείο του μέσου, το οποίο θεωρούμε ως αρχή του άξονα, $x=0$.



Α) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα δύο κύματα $y_1=f(x,t)$ και $y_2=f(x,t)$ καθώς και την εξίσωση του στάσιμου που θα προκύψει από τη συμβολή των δύο κυμάτων.

Β) Ποιες οι θέσεις των δεσμών του στάσιμου;

Γ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο της χορδής τη χρονική στιγμή $t_1=T$, όπου T η περίοδος των δύο κυμάτων, για σημεία της χορδής με τετμημένη θέσης από $x=-2\lambda$ μέχρι $x=2\lambda$, όπου λ το μήκος κύματος των κυμάτων

5) Τεντωμένη ελαστική χορδή έχει μήκος L και τα δύο άκρα της Z και H είναι στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία, ενώ η χορδή διατηρείται οριζόντια. Διεγέρτης θέτει το μέσο (O) της χορδής σε εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y=A\eta\mu\omega t$, για ορισμένο χρονικό διάστημα και μετά σταματά. Τα παραγόμενα κύματα έχουν μήκος κύματος λ . Όταν αποκατασταθεί μόνιμο φαινόμενο στην χορδή, διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν 4 σημεία που παραμένουν ακίνητα, εκτός των Z και H .

Αν ο διεγέρτης θέσει το μέσο (O) της χορδής σε εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y=A\eta\mu 2\omega t$, για κατάλληλο χρονικό διάστημα και μετά πάψει να επιδρά, πόσα ακίνητα σημεία θα εμφανισθούν στη χορδή, όταν αποκατασταθεί μόνιμο φαινόμενο;

Ποιο το πλάτος ταλάντωσης του μέσου O , μετά την αποκατάσταση του μόνιμου φαινομένου;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1) Οι ταλαντώσεις των δύο πηγών περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$y_1 = A\mu\omega t \text{ με } t \geq 0 \quad \text{και} \quad y_2 = A\eta\mu\omega(t - \frac{T}{2}) \text{ με } t \geq \frac{T}{2}$$

Α) Τα κύματα περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$y_1 = A\eta\mu(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) \text{ με } t \geq \frac{r_1}{v} \quad \text{και} \quad y_2 = A\eta\mu(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi r_2}{\lambda} - \pi) \text{ με } t \geq \frac{r_2}{v} + \frac{T}{2}$$

Β) Μετά τη συμβολή των κυμάτων, η απομάκρυνση κάθε σημείου του μέσου περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi \frac{r_2 - r_1}{2\lambda} + \frac{\pi}{2}) \cdot \eta\mu(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi(r_1 + r_2)}{2\lambda} - \frac{\pi}{2})$$

Για το μέσο Μ ισχύει: $r_1 = r_2 \Rightarrow |A'| = 2A \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| = 0$

Γ) Για τα σημεία της επιφάνειας του υγρού, που βρίσκονται πάνω σε υπερβολές ακυρωτικής συμβολής, ισχύει:

$$\sin(2\pi \frac{r_2 - r_1}{2\lambda} + \frac{\pi}{2}) = 0 = \sin(2\kappa + 1) \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow r_2 - r_1 = \kappa \cdot \lambda, \kappa \in \mathbb{Z}$$

2) Α) Για τα σημεία της ευθείας που ορίζουν οι δύο πηγές και δεν ανήκουν στο ευθύγραμμο τμήμα O_1O_2 ισχύει:

$|r_1 - r_2| = d = 3 \frac{\lambda}{2} \Rightarrow |A'| = 0$ (οι υπερβολές απόσβεσης που διέρχονται από τις θέσεις των πηγών, εκφυλίζονται στις δύο ημιευθείες εκατέρωθεν του O_1O_2)

Β) Όταν η συχνότητα διπλασιαστεί, υποδιπλασιάζεται το μήκος κύματος:

$$\lambda' = \frac{v}{2f} \Rightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2\lambda'$$

Τότε όμως για τα σημεία της ευθείας που ορίζουν οι δύο πηγές και δεν ανήκουν στο ευθύγραμμο τμήμα O_1O_2 ισχύει:

$|r_1 - r_2| = d = 3 \frac{\lambda}{2} = 3 \frac{2\lambda'}{2} = 3\lambda' \Rightarrow |A'| = 2A$ (οι υπερβολές ενίσχυσης που διέρχονται από τις θέσεις των πηγών, εκφυλίζονται στις δύο ημιευθείες εκατέρωθεν του O_1O_2)

3) Για κάθε σημείο της επιφάνειας του υγρού, μετά τη συμβολή ισχύει:

$$A' = 2A \sin(2\pi \frac{r_2 - r_1}{2\lambda}) \Leftrightarrow A' = 2A \sin \left[2\pi \frac{v(t_2 - t_1)}{2\lambda} \right] \Leftrightarrow A' = 2A \sin(\pi \frac{v \cdot \Delta t}{\lambda}) \Leftrightarrow$$

$$A' = 2A \sin(\pi \frac{\Delta t}{T})$$

όπου Δt η χρονική διαφορά με την οποία φθάνουν στο σημείο του μέσου, τα κύματα από τις δύο πηγές.

Α) Για το σημείο Μ, $\Delta t = 3T$, άρα: $A' = 2A \sin 3\pi = -2A$. Οπότε:

$$y_M = -2A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right) \Rightarrow y_M = 2A \eta \mu \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right) + \pi \right]$$

Β) Για το σημείο Η, $\Delta t = 1,5T$, άρα: $A' = 2A \sin \nu \frac{3\pi}{2} = 0$. Οπότε: $y_H = 0$

4) Α) $y_1 = A \eta \mu \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} \right)$ με $t \geq \frac{x}{v}$

$$y_2 = A \eta \mu \left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{\lambda} + \pi \right) \text{ με } t \geq -\frac{x}{v} \text{ όπου } x \text{ η τετμημένη θέσης.}$$

Από τη συμβολή των δύο κυμάτων προκύπτει στάσιμο:

$$y = y_1 + y_2 = A \left[\eta \mu \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) + \eta \mu \left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{\lambda} + \pi \right) \right] \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$y = 2A \sin \nu \left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \right) \eta \mu \left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{με } -vt \leq x \leq vt$$

Β) Οι δεσμοί του στάσιμου, βρίσκονται στις θέσεις:

$$A' = 0 \Leftrightarrow \sin \nu \left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \right) = 0 = \sin \nu (2k+1) \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{2} = (2k+1) \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = k \frac{\lambda}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

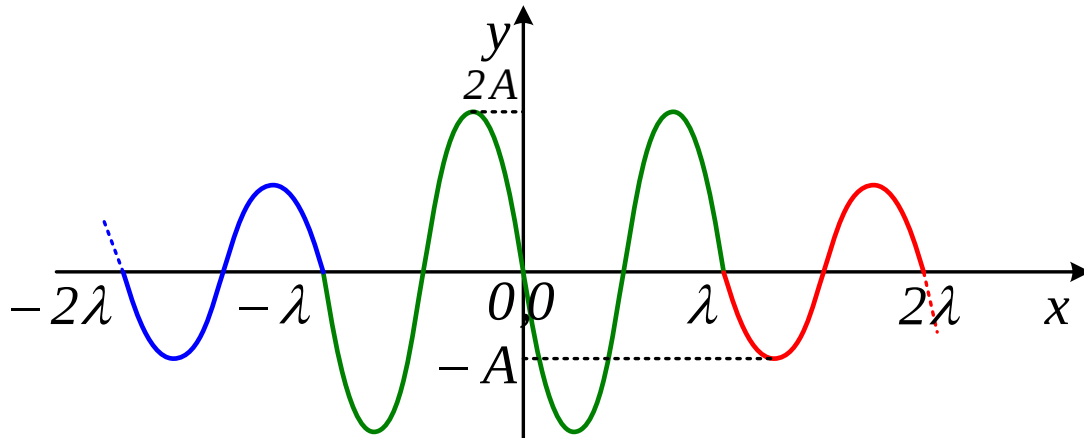
Γ) Τη χρονική στιγμή $t=T$, στάσιμο έχει δημιουργηθεί μεταξύ των θέσεων: $-\lambda \leq x \leq \lambda$ και περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y = 2A \sin \nu \left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \right) \eta \mu \left(2\pi + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow y = 2A \sin \nu \left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \right)$$

Στην περιοχή με: $-2\lambda \leq x \leq \lambda$ υπάρχει το κύμα y_1 , το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση: $y_1 = A \eta \mu \left(2\pi - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \Rightarrow y_1 = A \eta \mu \left(-\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \Rightarrow y_1 = -A \eta \mu \frac{2\pi x}{\lambda}$

Στην περιοχή με: $\lambda \leq x \leq 2\lambda$ υπάρχει το κύμα y_2 , το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση: $y_2 = A \eta \mu \left(2\pi + \frac{2\pi x}{\lambda} + \pi \right) = A \eta \mu \left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \pi \right) \Rightarrow y_2 = -A \eta \mu \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right)$

Η μορφή της χορδής είναι η ακόλουθη:



5) Αρχικά θα ισχύει: $L = 5\frac{\lambda}{2}$

Όταν η συχνότητα διπλασιαστεί, υποδιπλασιάζεται το μήκος κύματος:

$$\lambda' = \frac{v}{2f} \Rightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2\lambda'$$

Τότε θα ισχύει: $L = 5\frac{\lambda}{2} = 5\frac{2\lambda'}{2} \Rightarrow L = 10\frac{\lambda'}{2}$

Συνεπώς στη χορδή θα υπάρχουν 11 ακίνητα σημεία, μαζί με τα ακλόνητα άκρα Z, Η.

Το μέσο O τώρα θα είναι δεσμός, εφόσον ισχύει: $\frac{L}{2} = 5\frac{\lambda'}{2}$

Θοδωρής Παπασγουρίδης

parasgou@gmail.com