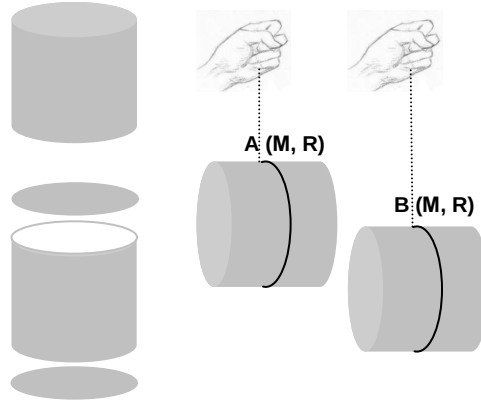


Φλοιός vs συμπαγές

Θέμα 4^ο

Διαθέτουμε δυο ομογενή στερεά A και B κυλινδρικής συμμετρίας με ακτίνα R και μάζα M. Τα στερεά A και B είναι οπτικά πανομοιότυπα ωστόσο το ένα από αυτά είναι συμπαγές ενώ το άλλο είναι κυλινδρικός φλοιός αποτελούμενος από λεπτούς δίσκους ακτίνας R και λεπτή παράπλευρη επιφάνεια ύψους $h=R$.



- A.** Να εξηγήσετε ποιοτικά ποιο από τα δυο στερεά έχει μεγαλύτερη ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα συμμετρίας του.
- B.** Τυλίγουμε και τα δυο στερεά με αβαρή νήματα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα αφήνουμε ταυτόχρονα από το ίδιο ύψος και κατέρχονται περιστρεφόμενα καθώς το νήμα ξετυλίγεται κατακόρυφα χωρίς να γλιστρά στην επιφάνειά τους. Παρατηρούμε ότι το στερεό B κατέρχεται με μεγαλύτερη επιτάχυνση. Ποιο από τα δυο στερεά είναι το συμπαγές και ποιο από αυτά είναι ο φλοιός;
- Γ.** Να δείξετε ότι η ροπή αδρανείας του κυλινδρικού φλοιού ως προς τον άξονά του δίνεται από τη σχέση: $I = \frac{3}{4}MR^2$. Η ροπή αδράνειας ομογενούς δίσκου ή κυλίνδρου μάζας m και ακτίνας r ως προς τον άξονά του είναι: $I_{cm} = \frac{1}{2}mr^2$.
- Δ.** Έστω ότι τα δυο στερεά τίθενται σε στροφική κίνηση γύρω τον άξονά τους μέσω σταθερής ροπής T. Να υπολογίσετε το λόγο L_A / L_B των στροφορμών που αντιστοιχούν στο τέλος της πρώτης περιστροφής κάθε στερεού.

Απαντήσεις

A. Τα δυο στερεά A και B έχουν ίσες μάζες και ίδιες διαστάσεις ωστόσο η κατανομή της μάζας γύρω από τον άξονα είναι διαφορετική. Στον κυλινδρικό φλοιό η μάζα κατανέμεται σε μεγαλύτερη απόσταση (αφού στον εσωτερικό χώρο υπάρχει κενό μπορούμε να φανταστούμε πως η μάζα που «λείπει» βρίσκεται «συμπιεσμένη» στο φλοιό) αρα η αντίστοιχη ροπή αδρανείας είναι μεγαλύτερη. Προφανώς το υλικό του φλοιού πρέπει να έχει μεγαλύτερη πυκνότητα από αυτό του συμπαγούς κυλίνδρου.

B.

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση των στερεών A και B έχουμε:

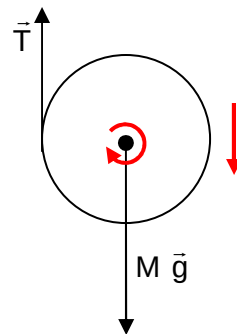
$$\begin{aligned} \sum F &= Ma_{cm} \\ Mg - T &= Ma_{cm} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum \tau_{cm} &= I_{cm} a_r \\ TR &= I_{cm} \frac{a_{cm}}{R} \\ T &= I_{cm} \frac{a_{cm}}{R^2} \quad (2) \end{aligned}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει:

$$\begin{aligned} Mg &= \left(\frac{I_{cm}}{R^2} + M \right) a_{cm} \\ a_{cm} &= \frac{Mg}{\frac{I_{cm}}{R^2} + M} \quad (3) \end{aligned}$$

Γ. Έστω σ η επιφανειακή πυκνότητα του φλοιού τότε η μάζα m_δ του κάθε δίσκου υπολογίζεται:



Γνωρίζουμε ότι:

$$a_{cm,B} > a_{cm,A}$$

οπότε συμφώνα με τη σχέση (3)

$$I_{cm,B} < I_{cm,A}$$

και από την απάντηση στο ερώτημα (A) προκύπτει ότι το στερεό B είναι το συμπαγές.

$$m_\pi = \sigma 2\pi R h, R = h$$

$$m_\pi = 2\sigma \pi R^2 \quad (5)$$

Από τις (4) και (5)

$$\sigma = \frac{m_{\delta}}{\pi R^2}$$

$$m_{\delta} = \sigma \pi R^2 \quad (4)$$

Εάν «ξετυλίξουμε» την παράπλευρη επιφάνεια γίνεται ορθογώνιο διαστάσεων $2\pi R$ και h και η μάζα της m_{π} υπολογίζεται:

$$\sigma = \frac{m_{\pi}}{2\pi R h}$$

Θεωρούμε την παράπλευρη επιφάνεια ως υλικά σημεία μάζας m_i που απέχουν απόσταση R από τον άξονα, οπότε η αντίστοιχη ροπή αδρανείας είναι:

$$I_{\pi} = m_1 R^2 + m_2 R^2 + \dots$$

$$I_{\pi} = (m_1 + m_2 + \dots) R^2$$

$$I_{\pi} = m_{\pi} R^2$$

$$I_{\pi} = \frac{M}{2} R^2 \quad (7)$$

Τελικά από τις (7) και (8)

$$I_A = I_{\pi} + 2I_{\delta}$$

$$I_A = \frac{M}{2} R^2 + 2 \frac{M}{8} R^2$$

$$I_A = \frac{3}{4} M R^2$$

Δ. Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την πρώτη περιστροφή έχουμε:

$$K = W$$

$$K - 0 = T 2\pi$$

$$K = 2\pi \quad (9)$$

$$m_{\pi} = 2m_{\delta} \quad (6)$$

ενώ

$$= m_{\pi} + 2m_{\delta} \quad (7)$$

Από τις (6) και (7)

$$m_{\pi} = \frac{M}{2} \text{ και } m_{\delta} = \frac{M}{4}$$

Για τον κάθε δίσκο έχουμε:

$$I_{\delta} = \frac{1}{2} m_{\delta} R^2$$

$$I_{\delta} = \frac{1}{2} \frac{M}{4} R^2$$

$$I_{\delta} = \frac{M}{8} R^2 \quad (8)$$

Από τις (9) και (10)

$$2\pi = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I}$$

$$L = \sqrt{4\pi I}$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για

Η σχέση κινητικής ενέργειας και
στροφορμής είναι:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2, L = I \omega$$

$$K = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I} \quad (10)$$

τα δυο στερεά Α και Β προκύπτει:

$$\frac{L_A}{L_B} = \frac{\sqrt{4\pi I_A}}{\sqrt{4\pi I_B}}$$

$$\frac{L_A}{L_B} = \sqrt{\frac{I_A}{I_B}}$$

$$\frac{L_A}{L_B} = \sqrt{\frac{3/4 MR^2}{1/2 MR^2}}$$

$$\boxed{\frac{L_A}{L_B} = \sqrt{\frac{3}{2}}}$$

K. Μωΐρης