

Για τον Αντώνη....

Η άσκηση αφιερώνεται στον φίλο **Αντώνη Διυή** συνάδελφο μαθηματικό που χτες εντελώς ξαφνικά μας άφησε

Ο Αντώνης ήταν ένα πάμπτωχο παιδί που το Φθινόπωρο του 73 πήρε μία βαλίτσα και χωρίς κανένα άλλο εφόδιο παρά μόνο το μυαλό του πήγε για να σπουδάσει τη μεγάλη του αγάπη τα **Μαθηματικά** στην Ιταλία.

Τέσσερα χρόνια επιστρέφει πίσω στο αγαπημένο του Βελβεντό όπου ανοίγει και το πρώτο φροντιστήριο του Βελβεντού. Δύο χρόνια αργότερα διορίζεται καθηγητής στο Γυμνάσιο του Βελβεντού και φεύγει στην σύνταξη σαν Λυκειάρχης του Λυκείου Βελβεντού σχεδόν τριάντα χρόνια μετά....

Άνθρωπος ανοιχτός άνθρωπος έξυπνος άνθρωπος που πάνω από όλα είχε το συμφέρον του τόπου και των μαθητών του. Ο τόπος τον τίμησε όσες φορές και αν αναμίχθηκε στο Δημοτικά Δρώμενα του Δήμου Βελβεντού εκλέγοντας τον **πάντα** Δημοτικό Σύμβουλο.

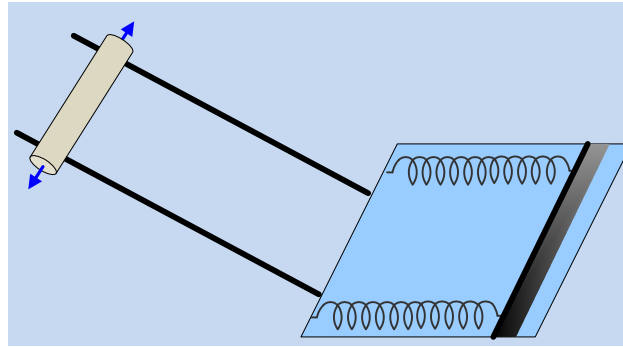
Ήταν ο άνθρωπος του:

ΕΞΕΤΑΣΗ

Ενώ ποτέ μα ποτέ δεν πάτησε σε δύο βάρκες.....

Αντώνη νασαι καλά όπου και αν είσαι....

Κύλινδρος μάζας $M=2\text{Kg}$ και ακτίνας $R=0,2\text{m}$ έχει μήκος L και αφήνεται ελεύθερος την χρονική στιγμή $t=0$ από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου ύψους $H=1,4\text{m}$ και γωνίας κλίσης $\phi=30^\circ$. Ο κύλινδρος παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=\sqrt{3}/3$ με το κεκλιμένο επίπεδο. Στο κάθε άκρο του κυλίνδρου και ακριβώς στο κέντρο του υπάρχουν δύο οριζόντιες ακίδες αμελητέας μάζας. Ο κύλινδρος μπαίνει χωρίς απώλεια ενέργειας σε οριζόντιο λείο επίπεδο όπου υπάρχουν δύο μεγάλα οριζόντια ιδανικά ελατήρια με σταθερές $K_1=K_2=100\text{N/m}$ με ειδικές υποδοχές για να μπαίνουν οι ακίδες ενώ τα ελατήρια απέχουν μεταξύ τους κατά L .



Ο κύλινδρος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τις ακίδες του και μέσα στις υποδοχές των δύο ελατηρίων.

- A) Ποια χρονική στιγμή θα μηδενιστεί για πρώτη φορά η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.
 B) Ποια η ταχύτητα του ανώτερου και του κατώτερου σημείου του κυλίνδρου τη στιγμή που τα ελατήρια φτάνουν για πρώτη φορά στην αρχική τους θέση.
 Γ) Πόσες περιστροφές θα έχει διαγράψει ο κύλινδρος μέχρι να σταματήσει στιγμιαία για πρώτη φορά.

$$I_{cm}=0,5MR^2.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- A) Για τη μεταφορική και την στροφική κίνηση του κυλίνδρου και υπό την προϋπόθεση ότι κυλίεται ο κύλινδρος θα έχουμε

$$Mg\mu\phi - T\alpha = Ma \quad (1) \quad TR = 0,5MR^2\alpha_{γων} \quad (2)$$

$$\text{θα βρούμε } a = 10/3 \text{ m/s}^2 \text{ \& } T = 10/3 \text{ N}$$

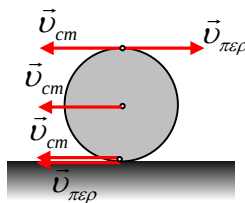
Παρατηρώ ότι ισχύει η συνθήκη κύλισης μιας και $T < \mu N$ $10/3 < 10$ άρα ο κύλινδρος θα κυλίεται. Θα διανύσει διάστημα $x_1 = (H-R)/\eta\mu 30 = 2,4 \text{ m}$. Με την βοήθεια του νόμου του διαστήματος θα έχουμε $x_1 = 1/2 at_1^2$ θα βρούμε $t_1 = 1,2 \text{ s}$. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας θα είναι $u_{cm} = at = 4 \text{ m/s}$ ενώ η γωνιακή του ταχύτητα εκείνη τη στιγμή θα είναι $\omega = u_{cm}/R = 20 \text{ r/s}$.

Εκείνη τη στιγμή ο κύλινδρος μπαίνει στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Οι μοναδικές δυνάμεις που του ασκούνται είναι οι δυνάμεις των δύο ελατηρίων που ασκούνται στο κέντρο του άρα δεν μπορούν να προκαλέσουν καμία αλλαγή στην στροφική κατάσταση του κυλίνδρου. Άρα και ενώ ο κύλινδρος βρίσκεται στο οριζόντιο λείο έδαφος θα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση με $\omega = 20 \text{ r/s}$. Το κέντρο μάζας

όμως του κυλίνδρου θα δέχεται τις δυνάμεις των ελατηρίων με αποτέλεσμα να εκτελεί μέρος γ.α.τ. Το κέντρο μάζας του κυλίνδρου θα ακινητοποιηθεί σε χρόνο $\Delta t = T/4$ από την στιγμή που ήρθε στο οριζόντιο επίπεδο. Η σταθερά της ταλάντωση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου θα είναι $D = K_1 + K_2 = 200\pi^2 \text{ N/m}$ άρα ο χρόνος $\Delta t = 0,05\text{s}$.

Αρα το κέντρο μάζας του κυλίνδρου θα ακινητοποιηθεί σε χρόνο $t = t_1 + \Delta t = 1,25\text{s}$.

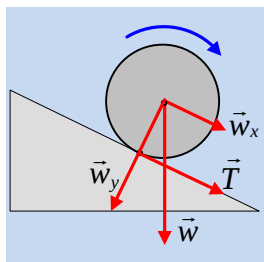
- Β) Όταν τα ελατήρια θα αποκτήσουν και πάλι το φυσικό τους μήκος και επειδή δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας στο οριζόντιο επίπεδο η σφαίρα θα συνεχίζει να περιστρέφεται δεξιόστροφα με $\omega = 20\text{r/s}$ ενώ το κέντρο μάζας θα έχει την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα αλλά με φορά προς το κεκλιμένο επίπεδο.



Έτσι η ταχύτητα του ανώτερου σημείου του κυλίνδρου θα είναι $u_{αν} = u_{cm} - u_{περ} = 0\text{m/s}$

Ενώ η ταχύτητα του κατώτερου σημείου του κυλίνδρου θα είναι $u_{κατ} = u_{cm} + u_{περ} = 8\text{m/s}$

- Γ) Εκείνη τη στιγμή $t' = t_1 + T/2 = 1,3\text{s}$ ο κύλινδρος θα αρχίσει να ανεβαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο και επειδή δεν συμβαίνουν ενεργειακές μεταβολές για αυτή τη μετάβαση το χαμηλότερο σημείο του κυλίνδρου θα συνεχίσει να έχει ταχύτητα με φορά προς τα πάνω. Έτσι θα αναπτυχθεί τριβή ολίσθησης και ο κύλινδρος θα αρχίσει να επιβραδύνεται μεταφορικά και στροφικά.



Για τη μεταφορική και την στροφική κίνηση του κυλίνδρου και υπό την

$$Mg\mu\phi + \mu Mg\sin\phi = Ma$$

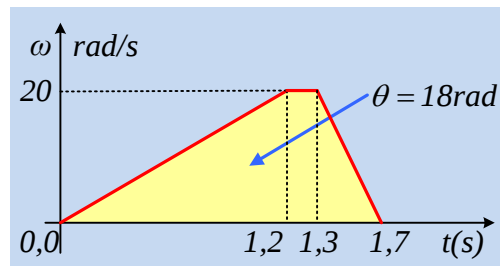
θα βρούμε $a_2=10\text{m/s}^2$ και

$$\mu Mg \sin \phi R = 0,5 MR^2 \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

θα βρούμε $\alpha_{\gamma\omega\nu}=50\text{r/s}^2$

Για να σταματούσε η μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου θα χρειαζόταν χρόνος $t_3=u_{cm}/a_2=0,4\text{s}$ υπό την προϋπόθεση βέβαια εντωμεταξύ να μην έχει αλλάξει καθόλου η κίνηση του κυλίνδρου. Στο ίδιο χρόνο παρατηρούμε ότι και $\omega=\omega_{\alpha\rho\chi}-\alpha_{\gamma\omega\nu}t_3=0\text{r/s}$. Δηλαδή ο κύλινδρος δεν προλαβαίνει να κυλίσει προς την άνοδο και σταματάει και μεταφορικά και στροφικά την στιγμή $t_4=1,7\text{s}$.

Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου σε συνάρτηση με το χρόνο και μέχρι να σταματήσει για πρώτη φορά ο κύλινδρος θα έχει τη μορφή



Έτσι οι περιστροφές που εκτέλεσε ο κύλινδρος μέχρι να σταματήσει στιγμιαία για πρώτη φορά είναι $N=9/\pi$ περιστροφές.

xristoselef@gmail.com